A.A. KIRILLOV

THÉORÈMES ET PROBLÈMES D'ANALYSE FONCTIONELLE

A. KIRILLOV
A. GVICHIANI

THÉORÈMES ET PROBLÈMES D'ANALYSE FONCTIONNELLE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

AVANT-PROPOS

La plus élémentaire abstraction mathématique, la droite, est vue sous des angles différents par les diverses branches mathématiques. Ainsi, l'approche algébrique de l'étude de la droite consiste à en décrire les propriétés en tant qu'ensemble dont les éléments sont justiciables d'« opérations », et à en construire un modèle algébrique sur la base de ces propriétés et non des propriétés topologiques. La topologie fait abstraction de la structure algébrique de la droite et en élabore un modèle formel fondé essentiellement sur sa « continuité ». L'analyse traite la droite et les fonctions sur la droite dans l'unité de leurs propriétés algébriques et topologiques.

La même situation prévaut à des niveaux supérieurs de l'abstraction. L'algèbre étudie les espaces vectoriels, les groupes, les anneaux, les modules, etc. La topologie, toute sorte de structures sur des ensembles arbitraires conférant un sens mathématique aux notions de limite, continuité, voisinage, etc. L'analyse fonctionnelle, les espaces vectoriels topologiques, les groupes topologiques, les anneaux normés, les modules des représentations des groupes topologiques dans les espaces vectoriels topologiques, etc. Donc, le principal objet de l'analyse fonctionnelle est l'étude d'êtres doués de structures algébrique et topologique compatibles.

Le cours d'analyse fonctionnelle, lu à la faculté de mécanique et de mathématiques de l'Université d'Etat de Moscou par A. Kolmogorov, et qui comprend traditionnellement la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue, est essentiellement consacré aux aspects classiques de l'analyse fonctionnelle. L'ouvrage que nous proposons au lecteur est une tentative de généralisation et de systématisation de l'expérience d'enseignement de ce cours à la faculté de mécanique et de mathématiques de l'Université d'Etat de Moscou. Il poursuit les objectifs suivants.

Exposer les notions théoriques indispensables d'analyse au niveau des facultés de mathématiques.

Fournir aux professeurs et aux étudiants un manuel reliant organiquement la théorie et la pratique et contenant des indications assez détaillées pour la résolution des exercices.

Donner au lecteur une idée de certains éléments de l'appareil mis en œuvre pour la résolution des exercices d'analyse fonctionnelle moderne (catégories, foncteurs, espace de cohomologies, caractères des groupes, etc.).

Mettre entre les mains du lecteur un ouvrage susceptible de le seconder dans l'étude des chapitres classiques de l'analyse fonctionnelle et dans l'assimilation des méthodes de résolution des exercices.

Cet ouvrage se décompose en trois parties étroitement liées entre elles : théorie, exercices et indications. Les chapitres correspondants de chacune de ces parties sont regroupés sous un même titre. Les chapitres sont divisés en paragraphes, les paragraphes en numéros (sauf le chapitre I).

A chaque numéro de la théorie sont consacrés 23 exercices de complexité variable, ceux qui constituent le strict minimum étant affectés d'un rond, ceux qui sont compliqués, d'un astérisque. Les quelques exercices particulièrement difficiles sont marqués de deux astérisques. Leurs corrigés peuvent être expliqués par le professeur ou bien faire l'objet d'un travail personnel. Quant aux exercices marqués d'un rond on pourrait les recommander pour des interrogations écrites.

Les auteurs tiennent à exprimer leur reconnaissance à S. Agaïan, A. Zelevinsky et A. Troussov pour l'aide apportée à la rédaction des indications.

A. Kirillov
A. Gvichiani

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES ENSEMBLES ET DE TOPOLOGIE

§ 1. Relations. Axiomes de choix et lemme de Zorn

Soient X un ensemble, R, un sous-ensemble de $X \times X$. On dit que des points x et y de X vérifient une *relation* R et on écrit xRy si $(x, y) \in R$.

Exemples de relations. 1) L'égalité :

$$R = \Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

2) La relation d'ordre sur la droite réelle :

$$R = \{(x, y) \mid x \geqslant y\}.$$

3) La relation de dépendance linéaire dans un espace vectoriel L sur le corps K :

$$R = \{(x, y) \mid y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \lambda y, \quad \lambda \in K\}.$$

Une relation R est une *relation d'équivalence* si elle possède les propriétés suivantes :

1) *réflexivité :* $(x, x) \in R \ \forall x \in X$ (ou $R \supset \Delta_X$) ;

2) *symétrie :* $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (ou $R' = R$, où R' désigne la relation transposée : $R' = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$) ;

3) *transitivité :* $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (ou $R \circ R \subset R$, où le signe $\circ$ désigne la composition des relations : $R_1 \circ R_2 = \{(x, z) \mid \exists y : (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\}$).

Soit R une relation d'équivalence. On écrira $x \sim y$ au lieu de xRy et on dira que *x est équivalent à y*. Désignons par $R(x)$ l'ensemble des éléments de X équivalents à x. Les propriétés 1), 2) et 3) nous disent que les sous-ensembles de la forme $R(x)$ recouvrent X tout entier et soit sont deux à deux disjoints, soit sont confondus. Ces sous-ensembles sont appelés *classes d'équivalence.* L'ensemble des classes d'équivalence est noté $X_{(R)}$ et dit *ensemble quotient* de X par R.

Exemples. 1) L'espace projectif $P(L)$, où L est un espace vectoriel donné. 2) L'espace quotient L_1/L_2 d'un espace vectoriel L_1 par un sous-espace L_2 (pour $x, y \in L_1$ on admet que $x \sim y$ si $x-y \in L_2$). 3) L'ensemble des résidus modulo n. 4) L'ensemble des rationnels positifs ou de tous les entiers comme classes d'équivalence des couples de nombres naturels.

On dit qu'une relation R sur un ensemble X est une *relation d'ordre partiel* si elle possède les propriétés suivantes :

1) *transitivité :* $(R \circ R \subset R)$;

2) *antisymétrie :* $(R \cap R' \subset \Delta_X)$.

Au lieu de xRy on écrit généralement $x \geqslant y$ et on dit que x suit y. Si de plus est réalisée la condition.

3) $R \cup R' = X \times X$ (c'est-à-dire deux éléments quelconques sont comparables), alors la relation R s'appelle *relation d'ordre.*

Exemples. 1) La relation d'ordre ordinaire sur la droite réelle. 2) La relation d'inclusion pour les sous-ensembles d'un ensemble donné (désignée par $\subset$) qui est une relation d'ordre partiel (mais pas une relation d'ordre). 3) La divisibilité des entiers (désignée généralement par le signe $|$) est également une relation d'ordre partiel.

Outre le signe $\geqslant$ pour une relation d'ordre partiel on utilisera le signe $>$ pour désigner la relation $\tilde{R} = R \backslash \Delta_X$. Donc, $x > y$ (qui se lit « x suit strictement y » ou « x est strictement supérieur à y ») signifie que $x \geqslant y$ et $x \neq y$.

On dit qu'un sous-ensemble Y d'un ensemble partiellement ordonné X est *borné supérieurement* (resp. *inférieurement*) s'il admet un *majorant* (resp. *minorant*), c'est-à-dire un élément $x \in X$ tel que $y \leqslant x$ (resp. $y \geqslant x$) pour tous les $y \in Y$.

Un ensemble X muni d'un ordre partiel R s'appelle *ensemble filtrant* si R possède la propriété $R' \circ R = X \times X$ (en d'autres termes, quels que soient x et y de X il existe un élément z suivant x et y). Si (X, R) est un ensemble filtrant, M un ensemble quelconque, alors une application de X dans M s'appelle *suite généralisée* de M. Cette notion est une généralisation de la notion de suite à laquelle elle se ramène si X est la série naturelle munie de la relation d'ordre habituelle.

La notion de limite est définie dans un espace topologique (en particulier métrique) X pour les suites généralisées : on dit qu'un point $x \in X$ est limite d'une suite généralisée $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si pour tout voisinage V du point x il existe un élément $\alpha(V) \in A$ tel que $x_\alpha \in V$ pour tous les $\alpha \geqslant \alpha(V)$.

Dans les cours de mathématiques supérieures on dit souvent que la notion d'*ensemble* est « tellement vague qu'il est difficile de la définir » et pour cette raison on se limite à l'indication de synonymes : collection, famille, etc. En fait, il existe une théorie des ensembles dans le cadre de laquelle cette notion est rigoureusement définie (bien entendu sans recourir à une autre notion plus simple ou plus générale, mais en décrivant les propriétés de la notion d'ensemble). Ceci étant, toute « collection », toute « famille » n'est pas forcément un ensemble. (La notion d'ensemble de tous les ensembles est par exemple contradictoire.) Néanmoins, il existe des théories cohérentes assez riches en ensembles.

Dans la plupart des branches mathématiques il suffit que parmi les ensembles considérés il en existe au moins un qui soit infini et soit justiciable des opérations suivantes :

1) la réunion $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$;

2) l'intersection $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$;

3) la différence $X \backslash Y$;

4) la construction d'un *ensemble d'applications de X dans Y désigné par* Y^X ;

5) le produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

X, Y, A et tous les X_α, $\alpha \in A$ sont des ensembles et nous admettons que le résultat de ces opérations est également un ensemble.

La dernière opération mérite un examen plus détaillé. Supposons que A est un ensemble et qu'à tout élément $\alpha \in A$ est associé un ensemble X_α non vide. Un élément de l'ensemble $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ est par définition une application $\alpha \mapsto x_\alpha$ de A dans $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ telle que $x_\alpha \in X_\alpha$ pour tous les $\alpha \in A$. Si l'ensemble A est infini l'existence d'une telle application n'est pas évidente (et, comme on le sait maintenant, ne peut être mise en évidence à partir de son existence pour des A finis et à partir d'autres axiomes naturels). Donc, affirmer que le produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ n'est pas vide pour X_α non vides, est un axiome appelé *axiome de choix* ou *axiome de Zermelo.* Voici deux propositions équivalentes à l'axiome de choix.

Lemme de Zorn. *Si dans un ensemble partiellement ordonné X tout sous-ensemble ordonné est borné supérieurement (resp. inférieurement), alors X contient au moins un élément maximal (resp. minimal) x_0.*

Remarque. Le terme « élément maximal » ne veut pas dire que $x_0 \geqslant x$ pour tous les $x \in X$ (un tel élément sera appelé élément *maximum*). Dire que x_0 est maximal revient à dire qu'il n'existe pas dans X un élément suivant strictement x_0.

Théorème de Zermelo. *Tout ensemble peut être totalement ordonné, c'est-à-dire muni d'une relation d'ordre pour laquelle tout sous-ensemble contient un élément minimum.*

Ces propositions sont toutes deux la généralisation d'un principe classique d'induction mathématique et le remplacent dans les cas, où l'on a affaire aux ensembles non dénombrables.

Au lecteur désireux d'approfondir ses connaissances des fondements de la théorie des ensembles nous conseillons de consulter le « Fascicule des résultats » de l'ouvrage [5].

§ 2. Complétions

Définition. Dans un espace métrique X, on dit qu'une suite $\{x_n\}$ est une *suite fondamentale* ou *suite de Cauchy* si la distance $d(x_n, x_m) \to 0$ lorsque $n, m \to \infty$.

Un espace métrique X est *complet* si toute suite fondamentale y admet une limite.

Les espaces complets jouissent de la propriété importante suivante : ils sont justiciables du théorème des boules contractiles et du principe des applications contractantes (voir, par exemple, [18]). Mais on a souvent affaire à des espaces non complets. Il existe une remarquable construction qui permet de faire d'un espace non complet un espace complet par adjonction des points « manquants ».

Définition. Soit X un espace métrique. On appelle *complétion* de X un espace métrique Y possédant les propriétés suivantes :

1) Y est un espace complet ;

2) Y contient un sous-espace Y_0 isométrique à X ;

3) Y_0 est dense dans Y (c'est-à-dire l'adhérence de Y_0 est confondue avec Y ; en d'autres termes, tout point de Y est point limite pour Y_0).

Exemple. L'ensemble **R** des réels est la complétion de l'ensemble des rationnels **Q** muni de la distance ordinaire.

Théorème 1. *Tout espace métrique X admet une complétion Y. Deux complétions quelconques Y' et Y'' de X sont isométriques et l'isométrie qui les relie peut être choisie telle qu'elle laisse invariants les points de X.*

La démonstration revient à une construction de la complétion. Désignons par d une distance sur X. Soit F l'ensemble de toutes les suites fondamentales de points de X. Si $x = \{x_n\}$ et $y = \{y_n\}$ sont deux points de F, alors la suite numérique $d(x_n, y_n)$ sera aussi fondamentale, puisque $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$. Cette suite admet donc une limite que nous noterons $d(x, y)$. La quantité $d(x, y)$ possède presque toutes les propriétés de la distance. En effet, les inégalités $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$ et les égalités $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ se déduisent aisément par passage à la limite à partir des inégalités et égalités respectives, où x, y, z sont remplacés par x_n, y_n, z_n. Seule n'a pas lieu la propriété de séparabilité: $d(x, y) = 0$ ne dit pas en général que $x = y$.

Munissons F de la relation $R = \{(x, y) \mid d(x, y) = 0\}$. Des propriétés de la distance mentionnées plus haut il résulte que R est une relation d'équivalence. Posons $Y = F_{(R)}$ et définissons une distance sur Y en posant $d(R(x), R(y)) = d(x, y)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette définition est correcte.

Montrons maintenant que Y est une complétion de X. Considérons à cet effet une application $\varphi : X \to Y$ qui à tout point x associe une classe $\varphi(x)$ contenant la suite constante (donc fondamentale) $\bar{x} = (x, x, x, \ldots, x, \ldots)$. Il est évident que l'application φ est isométrique. Désignons par Y_0 l'image de X par l'application φ. Soient, par ailleurs, y'

un élément quelconque de Y et $\{x_n\} \in F$ une suite de la classe y. Alors

$$\lim_{n \to \infty} d(\varphi(x_n), y) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} (d(x_n, x_m)) = 0.$$

Ceci exprime que y est la limite de la suite $\{\varphi(x_n)\}$, donc est un point limite pour Y_0.

Montrons que Y est complet. Soit $\{y_n\}$ une suite fondamentale dans Y. Comme Y_0 est dense dans Y, on peut exhiber une suite $\{\varphi(x_n)\}$ dans Y_0 telle que $d(\varphi(x_n), y_n) \to 0$. Il est clair que $\{y_n\}$ et $\{\varphi(x_n)\}$ convergent ou divergent simultanément. Mais la suite $\{\varphi(x_n)\}$ admet pour limite le point y, classe de la suite $\{x_n\}$. En effet,

$$\lim_{n \to \infty} d(\varphi(x_n), y) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Soient maintenant Y' et Y'' deux complétions de X, $\varphi' : X \to Y'_0$, $\varphi'' : X \to Y''_0$ les applications isométriques correspondantes. Considérons l'application $\psi_0 = \varphi' \circ (\varphi'')^{-1}$ de Y''_0 dans Y'_0. Cette application est isométrique, donc envoie des suites fondamentales dans des suites fondamentales. Comme Y' et Y'' sont complets, les suites fondamentales de Y'_0 (resp. Y''_0) convergent dans Y' (resp. dans Y''). Ceci nous permet de prolonger de façon unique l'isométrie $\psi_0 : Y''_0 \to Y'_0$ en l'isométrie $\psi : Y'' \to Y'$, en posant $\psi\left(\lim_{n \to \infty} y_n\right) = \lim_{n \to \infty} \psi_0(y_n)$. C. q. f. d.

En fait, pour avoir une complétion on se sert plus souvent de la construction du

Théorème 2. *Soient M un espace métrique complet, X une partie de M. Pour que X soit complet, il est nécessaire et suffisant qu'il soit fermé dans M. En particulier, pour complétion de X on peut prendre son adhérence dans M.*

(Voir démonstration dans exercice 31.)

Exemple. La complétion de l'intervalle $]a, b[$ pour la distance ordinaire est l'intervalle $[a, b]$, adhérence de $]a, b[$ dans $\mathbf{R}$.

§ 3. Catégories et foncteurs

La théorie des catégories est un cadre de recherche particulier qui permet de déduire de nombreuses définitions et constructions mathématiques à partir de notions générales. On se propose de familiariser le lecteur avec les éléments de cette théorie.

Une *catégorie* $\mathfrak{K}$ est la donnée d'une collection (généralement pas un ensemble, voir § 1) notée Ob ($\mathfrak{K}$) dont les éléments sont appelés *objets de* $\mathfrak{K}$; pour tout couple d'objets A et B, d'un ensemble noté Mor (A, B) dont les éléments sont appelés *morphismes* de A dans B ; pour tout triplet (A, B, C) d'objets, d'une application qui associe à tout élément f de Mor (A, B) et à tout élément g de Mor (B, C) un élément, noté $g \circ f$, de Mor (A, C). On admet que cet élément possède les propriétés usuelles d'une composée d'applications : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. De plus, dans l'ensemble Mor

(A, A) il existe un élément, noté 1_A, et appelé *morphisme unité*, tel que : $1_A \circ f = f$, $g \circ 1_A = g$ pour tout élément $f \in \mathrm{Mor}(B, A)$ et tout élément $g \in \mathrm{Mor}(A, B)$. Par souci de suggestion on désigne les objets des catégories par des points et les morphismes par des flèches reliant ces points.

Exemples. 1) La catégorie des ensembles admet pour objets les ensembles, et pour morphismes, les applications.

2) La catégorie des groupes (resp. des anneaux, des algèbres) admet pour objets les groupes (resp. les anneaux, les algèbres), et pour morphismes, les homomorphismes.

3) La catégorie des espaces topologiques admet pour objets les espaces topologiques, et pour morphismes, les applications continues.

4) La catégorie des espaces vectoriels sur un corps donné K admet pour objets les espaces vectoriels sur K, et pour morphismes, les opérateurs linéaires.

Deux objets A et B d'une catégorie $\mathfrak{K}$ s'appellent *isomorphes* s'il existe des morphismes $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ et $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$, tels que $f \circ g = 1_B$, $g \circ f = 1_A$.

On dit qu'un objet A d'une catégorie $\mathfrak{K}$ est un *objet répulsif**) *universel* si pour tout objet B de $\mathfrak{K}$ l'ensemble $\mathrm{Mor}(A, B)$ contient exactement un élément. (De façon imagée : une flèche seulement relie un point A à tout autre point B.)

Montrons à titre d'exercice que deux objets universels A et B (s'ils existent) sont isomorphes. En effet, soient f l'unique morphisme de A dans B, g, l'unique morphisme de B dans A. Alors $f \circ g \in \mathrm{Mor}(B, B)$, $g \circ f \in \mathrm{Mor}(A, A)$. Or, $\mathrm{Mor}(B, B)$ ne contient que l'élément 1_B (puisque B est universel) et $\mathrm{Mor}(A, A)$, que l'élément 1_A (puisque A est universel), donc $f \circ g = 1_B$, $g \circ f = 1_A$.

Nous allons montrer que les notions d'ensemble quotient et de complétion sont des cas particuliers de la notion d'objet universel. Dans le premier cas, nous considérons la catégorie $\mathfrak{K}$ suivante construite à l'aide d'un ensemble X et d'une relation R. Un objet de $\mathfrak{K}$ sera une application φ de l'ensemble X dans un ensemble Y telle que : $xRy \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$. On appellera morphisme d'un objet $\varphi : X \to Y$ dans un objet $\psi : X \to Z$ une application $\chi : Y \to Z$ telle que soit commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\chi"] \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1}$$

Ceci signifie que $\chi \circ \varphi = \psi$. (D'une façon générale, dire qu'un diagramme constitué des objets et morphismes d'une catégorie est un *diagramme commutatif* revient à dire que le produit des morphismes ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée et non du chemin suivi. Dans l'exemple considéré il existe deux chemins pour aller de X en Z, ce qui donne $\chi \circ \varphi = \psi$.)

*) Nous omettrons parfois le terme « répulsif » par souci de simplicité.

Vérifions que la projection canonique $p: X \to X_{(R)}$ est un objet universel dans la catégorie $\mathfrak{K}$. Soit $\varphi: X \to Y$ un objet de $\mathfrak{K}$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\varphi"'] & X_{(R)} \arrow[d, dashed] \\ & Y \end{tikzcd} \tag{2}$$

On s'assure immédiatement que la condition de commutativité définit de façon unique l'application correspondant à la flèche en pointillé. Autrement dit, Mor (p, φ) ne comprend qu'un seul élément. Donc, $p: X \to X_{(R)}$ est un objet universel.

Construisons maintenant une complétion. Soit X un espace métrique. Considérons une catégorie $\mathfrak{K}$ admettant pour objets les applications isométriques $\varphi: X \to Y$, où Y est un espace métrique complet (qui n'est pas le même pour chaque objet). On appellera morphisme de $\varphi: X \to Y$ dans $\psi: X \to Z$ une application isométrique $\chi: Y \to Z$ telle que le diagramme (1) soit commutatif.

Vérifions que l'injection canonique φ de X dans sa complétion Y est un objet universel. En effet, pour tout objet $\psi: X \to Z$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & Y \\ & Z \end{tikzcd} \tag{3}$$

peut être achevé de façon unique en un diagramme commutatif de la forme (1). L'application χ cherchée est définie sur le sous-ensemble $\varphi(X)$ par $\chi = \psi \circ \varphi^{-1}$ (ce qui est la condition de commutativité), et se prolonge par continuité :

$$\chi(\lim y_n) = \lim \chi(y_n).$$

Signalons que l'unicité de la complétion (à l'isométrie près) résulte du théorème général de l'isomorphisme des objets universels démontré plus haut.

La notion de foncteur est fondamentale en théorie des catégories.

Définition. On appelle *foncteur covariant* d'une catégorie $\mathfrak{K}_1$ dans une catégorie $\mathfrak{K}_2$ une application F qui à tout objet A de $\mathfrak{K}_1$ fait correspondre un objet $F(A)$ de $\mathfrak{K}_2$ et à tout morphisme φ de Mor (A, B) un morphisme $F(\varphi)$ de Mor $(F(A), F(B))$, les conditions suivantes étant satisfaites :

1) $F(1_A) = 1_{F(A)}$;

2) $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$.

On a souvent affaire aussi à des applications F associant à tout morphisme $\varphi \in$ Mor (A, B) un morphisme $F(\varphi) \in$ Mor $(F(B), F(A))$ et vérifiant au lieu de la condition 2) la condition

2') $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$.

Ces applications sont appelées *foncteurs contravariants*.

Exemples. 1) Le passage d'un espace métrique à sa complétion est un foncteur covariant de la catégorie des espaces métriques dans la catégorie

des espaces métriques complets (les morphismes de ces deux catégories étant les applications isométriques).

2) Le passage d'un espace vectoriel L sur un corps K à l'espace dual L' (l'espace des fonctionnelles K-linéaires sur L) est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces vectoriels sur K dans elle-même.

3) Pour toute catégorie $\mathfrak{K}$, les applications $A \to \mathrm{Mor}(\cdot, A)$ (resp. $A \to \mathrm{Mor}(A, \cdot)$) se prolongent en un foncteur covariant (resp. contravariant) de $\mathfrak{K}$ dans la catégorie des ensembles. Pour cela il faut associer à un morphisme $\varphi \in \mathrm{Mor}(A_1, A_2)$ une application de $\mathrm{Mor}(\cdot, A_1)$ dans $\mathrm{Mor}(\cdot, A_2)$ (resp. $\mathrm{Mor}(A_2, \cdot)$ dans $\mathrm{Mor}(A_1, \cdot)$) qui consiste en un produit à gauche (resp. à droite) par le morphisme φ.

L'ensemble des foncteurs covariants de $\mathfrak{K}_1$ dans $\mathfrak{K}_2$ forme une catégorie notée $\mathrm{Cov}(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ dont les morphismes appelés *morphismes fonctoriels* ou *transformations naturelles des foncteurs* sont définis comme suit : étant donnés des foncteurs F_1 et F_2 de $\mathfrak{K}_1$ dans $\mathfrak{K}_2$, on appelle morphisme φ de F_1 dans F_2 une collection d'applications $\varphi(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{K}_2}(F_1(A), F_2(A))$ (où A parcourt $\mathrm{Ob}(\mathfrak{K}_1)$) telle que pour tout $\psi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{K}_1}(A, B)$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "F_1(\psi)"] \arrow[d, "\varphi(A)"'] & F_1(B) \arrow[d, "\varphi(B)"] \\ F_2(A) \arrow[r, "F_2(\psi)"] & F_2(B) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On définit de façon analogue la catégorie $\mathrm{Cont}(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ des foncteurs contravariants de $\mathfrak{K}_1$ dans $\mathfrak{K}_2$.

Il est possible de démontrer de nombreuses propositions concernant les foncteurs uniquement pour des foncteurs covariants en raison du principe de dualité suivant. Pour toute catégorie $\mathfrak{K}$ définissons une *catégorie duale* $\mathfrak{K}^0$ telle que $\mathrm{Ob}(\mathfrak{K}^0) = \mathrm{Ob}(\mathfrak{K})$, $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{K}^0}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathfrak{K}}(B, A)$ et que le produit $f \circ g$ dans $\mathfrak{K}^0$ soit défini comme le produit $g \circ f$ dans $\mathfrak{K}$. Autrement dit, on déduit $\mathfrak{K}^0$ à partir de $\mathfrak{K}$ *par inversion du sens des flèches.* Il est clair qu'un foncteur contravariant de $\mathfrak{K}_1$ dans $\mathfrak{K}_2$ n'est autre chose qu'un foncteur covariant de $\mathfrak{K}_1^0$ dans $\mathfrak{K}_2$ (ou de $\mathfrak{K}_1$ dans $\mathfrak{K}_2^0$).

On dit que deux catégories $\mathfrak{K}_1$ et $\mathfrak{K}_2$ sont équivalentes s'il existe des foncteurs covariants $F\colon \mathfrak{K}_1 \to \mathfrak{K}_2$, $G\colon \mathfrak{K}_2 \to \mathfrak{K}_1$ tels que $F \circ G$ et $G \circ F$ soient isomorphes aux foncteurs identités dans $\mathrm{Cov}(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_2)$ et $\mathrm{Cov}(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_1)$ respectivement.

Exemple. Les trois célèbres théorèmes de Lie et le théorème de Cartan affirment l'équivalence des trois catégories suivantes : la catégorie des groupes simplement connexes de Lie, la catégorie des groupes locaux de Lie et la catégorie des algèbres réelles de Lie.

Exemple plus simple : la catégorie des espaces topologiques discrets (dont toutes les parties sont ouvertes) est équivalente à la catégorie des ensembles.

Le théorème qui suit illustre bien la notion d'équivalence des catégories.

Théorème 3. *Si tous les objets d'une catégorie* $\mathfrak{K}$ *sont isomorphes, alors* $\mathfrak{K}$ *est équivalente à une catégorie* $\mathfrak{K}_0$ *composée d'un seul objet* $A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{K})$ et *de tous les morphismes de* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{K}}(A_0, A_0)$.

Comme exemple d'une telle catégorie citons la catégorie des espaces vectoriels de dimension n sur un corps donné ou la catégorie de tous les groupes de p éléments (p est un nombre premier).

Démonstration. Pour chaque objet $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{K})$ fixons un isomorphisme $\alpha(A)\colon A \to A_0$ et construisons un foncteur F de la manière suivante : $F(A) = A_0$ pour tous les $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{K})$; si $\beta \in \mathrm{Mor}(A, B)$ on posera $F(\beta) = \alpha(B) \circ \beta \circ \alpha(A)^{-1} \in \mathrm{Mor}(A_0, A_0)$. Désignons de plus le foncteur d'immersion de $\mathfrak{K}_0$ dans $\mathfrak{K}$ par G. Il est évident que $F \circ G = 1_{\mathfrak{K}_0}$, $G \circ F = F$. Prouvons que les foncteurs F et $1_{\mathfrak{K}}$ sont isomorphes. Pour cela définissons des morphismes fonctionnels $\varphi\colon F \to 1_{\mathfrak{K}}$ et $\psi\colon 1_{\mathfrak{K}} \to F$ tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = 1$. Par définition d'un morphisme fonctoriel pour tout β les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] & B \\ A_0 \arrow[u, "\varphi(A)"] \arrow[r, "F(\beta)"] & A_0 \arrow[u, "\varphi(B)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi(A)"'] & B \arrow[d, "\psi(B)"] \\ A_0 \arrow[r, "F(\beta)"] & A_0 \end{tikzcd}$$

seront commutatifs.

D'autre part, on doit avoir les relations $\varphi(A) \circ \psi(A) = 1_A$, $\psi(A) \circ \varphi(A) = 1_{A_0}$. Il est évident que ceci aura lieu si l'on pose $\varphi(A) = \alpha(A)^{-1}$, $\psi(A) = \alpha(A)$. C. q. f. d.

CHAPITRE 2

THÉORIE DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRALE

§ 1. Théorie de la mesure

1. Algèbre d'ensembles. Soit X un ensemble. On désignera par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties de X.

Définition. On appelle *anneau de parties* d'un ensemble X une famille $R \in \mathcal{P}(X)$ non vide fermée pour la réunion, l'intersection et la différence.

Dans ce cas, R est aussi fermée pour la différence symétrique $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Structure forte d'anneau. 1) On appelle *algèbre d'ensembles* un anneau $R \subset \mathcal{P}(X)$ contenant l'ensemble X tout entier.

2) On appelle *σ-anneau* un anneau R fermé pour la réunion dénombrable.

3) On appelle *δ-anneau* un anneau fermé pour l'intersection dénombrable.

4) On appelle *σ-algèbre* (resp. *δ-algèbre*) un anneau qui est à la fois algèbre et *σ-anneau* (resp. δ-anneau).

Structure faible d'anneau. On appelle *semi-anneau* une famille $S \subset \mathcal{P}(X)$ fermée pour l'intersection et possédant la propriété suivante : $A, B \in S$, il existe alors $C_1, \ldots, C_n \in S$ tels que $A \setminus B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_n$ (le symbole $\sqcup$ désigne la *réunion disjonctive*, c'est-à-dire la réunion d'ensembles disjoints).

Exemples. 1) L'ensemble S de tous les intervalles semi-ouverts $[a, b[$ de la droite réelle est un semi-anneau, mais pas un anneau.

2) Si $R_1 \subset \mathcal{P}(X_1)$ et $R_2 \subset \mathcal{P}(X_2)$ sont des anneaux d'ensembles, alors la famille

$$R_1 \times R_2 = \{A \times B \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid A \in R_1,\ B \in R_2\}$$

est un semi-anneau (mais en général pas un anneau). Ceci est valable si R_1 et R_2 sont des semi-anneaux (cf. exercices 79 et 80).

Si S est une famille quelconque de parties de X, il existe un plus petit anneau (resp. σ-anneau) contenant S. On le désigne par $R(S)$ (resp. $R_\sigma(S)$) et on l'appelle *anneau* (resp. *σ-anneau*) *engendré par S* (voir exercice 76).

Soit A une partie de X. On appelle *fonction caractéristique* de A la fonction χ_A définie sur X par la condition

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

On convient que les valeurs de la fonction caractéristique ne sont pas des nombres, mais des résidus modulo 2. Dans ce cas, on a les égalités (voir exercice 86).

1) $\chi_{A_1 \cap A_2} = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$,

2) $\chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} - \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$,

3) $\chi_{A_1 \triangle A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$,

4) $\chi_{A_1 \setminus A_2} = \chi_{A_1} - \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$.

Soient X un espace topologique, $U \subset \mathcal{P}(X)$, une famille d'ouverts de X. Les éléments $R_\delta(U)$ s'appellent *boréliens* de X.

Exemple. L'ensemble de tous les points rationnels de l'intervalle [0, 1] est un borélien de la droite réelle.

2. Prolongement de la mesure.

Définition. On appelle *mesure* sur un semi-anneau $S \subset \mathcal{P}(X)$ une fonction μ réelle positive sur S possédant la propriété d'additivité :

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

La mesure μ s'appelle *σ-additive* si elle possède la propriété suivante :

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1}$$

(Plus exactement si tous les A_k et $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ appartiennent à S, alors le second membre de (1) converge et sa somme est égale au premier membre.)

Exemples. 1) Soit x_0 un point fixé de X. Pour tout ensemble $A \subset X$, posons

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x_0 \notin A. \end{cases}$$

Cette mesure est σ-additive sur $\mathcal{P}(X)$.

2) Supposons que S est le semi-anneau des intervalles semi-ouverts $[a, b[$ de $\mathbf{R}$, considéré plus haut. Posons $\mu([a, b[) = b - a$. Alors μ est une mesure sur S. La σ-additivité de cette mesure sera établie plus bas.

Théorème 1. *Toute mesure μ' sur un semi-anneau S est prolongeable de façon unique en une mesure μ sur l'anneau $R(S)$. Si la mesure initiale est σ-additive, son prolongement le sera également.*

Démonstration. Utilisons le fait que tout ensemble $A \in R(S)$ est de la forme $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in S$ (voir exercice 77). Donc, la quantité $\mu(A)$ (si elle est définie) doit être égale à $\sum_{k=1}^{n} \mu'(A_k)$. Nous allons montrer que cette égalité définit bien une mesure μ sur $R(S)$.

1) *Validité de la définition.* Soit $A_k, B_l \in S$, $\bigsqcup_{l=1}^{m} B_l = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = A$. Posons $C_{kl} = A_k \cap B_l$. Il est alors clair que $A_k = \bigsqcup_l C_{kl}$, $B_l = \bigsqcup_k C_{kl}$, donc $\sum_k \mu'(A_k) = \sum_{k,l} \mu'(C_{kl}) = \sum_l \mu'(B_l)$.

2) *Additivité.* Soit $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in R(S)$. Posons $A_k = \bigsqcup_{l=1}^{N(k)} C_{kl}$, où $C_{kl} \in S$. Alors, $A = \bigsqcup_{k,l} C_{kl}$ et $\mu(A) = \sum_{k,l} \mu'(C_{kl}) = \sum_k \sum_{l=1}^{N(k)} \mu'(C_{kl}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Reste à vérifier la σ-additivité de la mesure μ, si la mesure μ' l'est. Soit $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, A, $A_k \in R(S)$. Alors $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$, $A_k = \bigsqcup_{l=1}^{N(k)} B_{kl}$, où B_i, $B_{kl} \in S$. Posons $C_{ikl} = B_i \cap B_{kl}$. Donc

$$\mu(A) = \sum_i \mu'(B_i) = \sum_i \sum_{k,l} \mu'(C_{ikl}) = \sum_k \sum_{i,l} \mu'(C_{ikl}) = \sum_k \mu(A_k).$$

(Nous avons utilisé les relations $B_i = \bigsqcup_{k,l} C_{ikl}$, $A_k = \bigsqcup_{i,l} C_{ikl}$ et la possibilité d'intervertir l'ordre de sommation dans les séries de termes non négatifs.)

C.q.f.d.

Une propriété importante des mesures σ-additives est la *σ-monotonie :* si $A, A_k \in S$ et $A \subset \bigcup A_k$, alors $\mu(A) \leqslant \sum \mu(A_k)$.

Il se trouve qu'une mesure σ-additive définie sur un semi-anneau S se prolonge non seulement à un anneau $R(S)$ voire même au σ-anneau $R_\sigma(S)$, mais à un ensemble bien plus vaste d'ensembles dits mesurables.

Définition. Soient donnés un ensemble X, un semi-anneau $S \subset \mathcal{P}(X)$ et une mesure σ-additive μ sur S. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ définissons la *mesure extérieure* $\mu^*(A)$ par

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \in S.$$

Appelons *mesurable-Lebesgue* par rapport à la mesure μ un sous-ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $B \in R(S)$ tel que $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. (Dans la suite les ensembles mesurables-Lebesgue par rapport à la mesure μ seront appelés brièvement *mesurables* ou *μ-mesurables* si l'on a besoin de spécifier la mesure μ.)

Supposons maintenant que l'anneau $R(S)$ est une algèbre (c'est-à-dire contient l'élément maximum X). On a alors le

Théorème de Lebesgue. *La famille $L(S, \mu)$ des ensembles mesurables forme une σ-algèbre sur laquelle μ^* est une mesure σ-additive.*

Démonstration. Vérifions tout d'abord que la mesure extérieure μ^* est confondue avec la mesure initiale μ' (resp. avec son prolongement μ) pour les ensembles du semi-anneau initial S (resp. $R(S)$). En effet, si $A \in R(S)$ et $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, alors $\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ en vertu de la σ-monotonie de la

mesure μ. En passant à la borne inférieure sur tous les recouvrements, on déduit de là que $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$. D'autre part, puisque $A \in R(S)$, on peut représenter A sous la forme $A = \prod_{k=1}^{n} B_k$, où $B_k \in S$. Donc $\mu^*(A) \leqslant \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \mu(A)$. Signalons que la σ-monotonie découle de la définition même : si $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ alors $\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Décrivons brièvement la suite de la démonstration. Les éléments de l'anneau $R(S)$ forment un espace métrique non complet sur lequel la mesure μ est une fonction uniformément continue. Les ensembles mesurables sont les points de la complétion, la mesure μ^*, le prolongement en continuité de μ (voir exercices 98, 99).

Passons aux détails. Définissons la distance entre des ensembles A et B par la formule $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$. Pour vérifier les propriétés classiques de la distance, il est utile de remarquer que l'ensemble $A \triangle B$ peut être traité comme une « distance » entre A et B mesurée non pas en nombres mais en ensembles. L'axiome du triangle pour cette distance est (voir exercice 70)

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C).$$

Ceci et la monotonie de μ^* entraînent immédiatement l'axiome classique du triangle : $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(B, C)$. Les propriétés $d(A, B) = d(B, A)$ et $d(A, B) \geqslant 0$ sont évidentes. La dernière propriété $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$ n'est généralement pas réalisée. On tourne cette difficulté en considérant que les ensembles A et B sont équivalents si $d(A, B) = 0$. La fonction d se généralise aux classes des ensembles équivalents et possède toutes les propriétés de la distance.

On peut désormais définir un ensemble mesurable de la manière suivante : un ensemble A est *mesurable* s'il peut être approché avec une précision quelconque par des ensembles B de $R(S)$. Autrement dit, la famille $L(S)$ des ensembles mesurables est confondue avec l'adhérence de $R(S)$ dans l'espace métrique construit. On montre (voir exercice 99) que l'espace $\mathcal{P}(X)$ (plus exactement l'espace quotient des classes d'ensembles équivalents correspondant) est complet. Donc $L(S)$ peut aussi être considéré comme la complétion de $R(S)$.

Vérifions tout d'abord que $L(S)$ est une algèbre. Soient A_1 et A_2 des ensembles mesurables, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des ensembles B_1 et B_2 de $R(S)$ tels que $\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon$ et $\mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$. On a alors (voir exercice 71) les majorations suivantes :

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)) < 2\varepsilon,$$
$$\mu^*((A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2)) < 2\varepsilon,$$
$$\mu^*((A_1 \backslash A_2) \triangle (B_1 \backslash B_2)) < 2\varepsilon,$$

ce qui prouve la mesurabilité des ensembles $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ et $A_1 \backslash A_2$.

Prouvons maintenant que $L(S)$ est une σ-algèbre. Supposons que $A_k \in L(S)$ et $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des ensembles $B_k \in R(S)$ tels que $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon/2^k$. Posons $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. La relation $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \triangle \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \triangle B_k)$ entraîne $\mu^*(A \triangle B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Soit, d'autre part, $B'_k = B_k \backslash (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{k-1})$ pour $k > 1$ et $B'_1 = B_1$. Alors $B'_k \in R(S)$ et $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B'_k$. La série $\sum_k \mu(B'_k)$ étant convergente (ses sommes partielles sont bornées par $\mu(X)$) il existe un N tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(B'_k) < \varepsilon$. Posons $B' = \bigsqcup_{k=1}^{N} B'_k$. Alors $B' \in R(S)$ et $\mu^*(B \triangle B') < \varepsilon$. D'où $\mu^*(A \triangle B') \leqslant \leqslant \mu^*(A \triangle B) + \mu^*(B \triangle B') < 2\varepsilon$, ce qui prouve la mesurabilité de A.

Vérifions que μ^* est une mesure σ-additive sur $L(S)$.

Lemme. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$.

En d'autres termes, la fonction μ^* est uniformément continue par rapport à la distance $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$.

La démonstration est une conséquence de la monotonie de μ^* et des inclusions $A \subset B \cup (A \triangle B), B \subset A \cup (A \triangle B)$.

Supposons maintenant que $A_1, A_2 \in L(S)$ et $A = A_1 \sqcup A_2$. Pour tout $\varepsilon > 0$ choisissons B_1 et B_2 de $R(S)$ tels que $d(A_i, B_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Alors $d(A, B_1 \cup B_2) < 2\varepsilon$. Donc $|\mu^*(A) - \mu^*(B_1 \cup B_2)| < 2\varepsilon$. Mais $\mu^*(B_1 \cup B_2) = = \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1 + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2)$. Or, $\mu(B_1 \cap B_2) = d(B_1 \cap B_2, \varnothing) = = d(B_1 \cap B_2, \quad A_1 \cap A_2) < 2\varepsilon$, donc $|\mu^*(B_1 \cup B_2) - \mu_1(B_1) - \mu(B_2)| < 2\varepsilon$. En regroupant les inégalités initiales et celles obtenues, il vient $|\mu^*(A) - \mu^*(A_1) - \mu^*(A_2)| < 6\varepsilon$. Ceci étant valable $\forall \varepsilon > 0$ il s'ensuit que $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$, c'est-à-dire μ^* est additive sur $L(S)$.

Prouvons enfin que μ^* est σ-additive sur $L(S)$. Supposons que $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$. La σ-monotonie de μ^* entraîne $\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$. L'inégalité $\mu^*(A) \geqslant \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ s'obtient par passage à la limite à partir de $\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \mu^*(A_k)$, qui découle de l'additivité finie et de la monotonie de μ. C.q.f.d.

La condition $X \in R(S)$ est souvent trop forte. Considérons la condition plus faible $X \in R_\sigma(S)$. Alors $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_n$, où $X_n \in S$; donc, l'espace est une réunion dénombrable des ensembles du semi-anneau. Dans ce cas la mesure μ est dite *σ-finie*.

Définition. On dit qu'un ensemble A est *mesurable-Lebesgue* par rapport à une mesure σ-finie μ si sont mesurables les ensembles $A \cap X_i, i = 1, 2, \ldots$.

On appelle *mesure de A* la somme de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap X_i)$ si elle est convergente, et $+\infty$ si elle est divergente.

Il est immédiat de vérifier que les ensembles mesurables forment une σ-algèbre et que la mesure μ^* définie plus haut est σ-additive (avec une réserve évidente : les deux membres de l'égalité $\mu(\sqcup A_k) = \sum \mu(A_k)$ peuvent être infinis).

Définition. Soient X un ensemble, $R \subset \mathcal{P}(X)$ un σ-anneau. On dit qu'une fonction ν sur R réelle (resp. complexe) est une *charge* (resp. *charge complexe*) si elle est σ-additive au sens suivant : pour tous $A_k \in R$, l'appartenance $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset R$ entraîne que la série $\sum \nu(A_k)$ est absolument convergente et sa somme égale à $\nu(A)$. (Comparer avec l'exercice 131.)

Exemple. Toute combinaison linéaire de mesures σ-additives sur R à coefficients réels (resp. complexes) est une charge (resp. charge complexe). La réciproque est vraie.

Théorème 2. *Toute charge (resp. charge complexe) ν peut être représentée sous la forme $\nu = \mu_1 - \mu_2$ (resp. $\nu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$), où μ_k sont des mesures σ-additives.*

Définition. On appelle *variation d'une charge ν* sur un ensemble A la quantité

$$|\nu|(A) = \sup \sum_k |\nu(A_k)|, \quad A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Exemple. Si $\nu = \mu_1 - \mu_2$, alors $|\nu|(A) \leqslant \mu_1(A) + \mu_2(A)$. Cette inégalité se transforme en égalité si les mesures μ_1 et μ_2 sont *étrangères* sur A (c'est-à-dire si existe une décomposition $A = A_1 \sqcup A_2$ telle que $\mu_2(A_1) = \mu_1(A_2) = 0$).

Théorème 3. *La fonction $|\nu|$ est une mesure σ-additive sur* **R**. (Voir exercice 138.)

3. Constructions de mesures. Considérons le semi-anneau S des intervalles semi-ouverts $[a, b[$ de la droite réelle. La famille de toutes les mesures de ce semi-anneau se décrit d'une façon simple. Plus exactement, à toute mesure μ sur S associons une fonction F_μ sur **R** par la formule

$$F_\mu(t) = \begin{cases} \mu([0, t[) & \text{pour} \quad t > 0, \\ 0 & \text{pour} \quad t = 0, \\ -\mu([t, 0[) & \text{pour} \quad t < 0. \end{cases}$$

La fonction F_μ est visiblement non décroissante. Inversement, si F est une fonction non décroissante sur **R**, on peut définir une mesure μ_F sur S en posant $\mu_F([a, b[) = F(b) - F(a)$. (La vérification de l'additivité de μ_F est laissée au soin du lecteur.) La correspondance entre les mesures sur S et les fonctions non décroissantes sur **R** est biunivoque si ces fonctions sont telles que $F(0) = 0$.

Théorème 4. *Pour qu'une mesure μ sur S soit σ-additive il faut et il suffit que la fonction correspondante F sur* **R** *soit continue à gauche, c'est-à-dire $F(t-0) = F(t)$ pour tous les $t \in$* **R**.

Démonstration. La nécessité résulte de la relation $F(t)-F(t-0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu([t-\varepsilon, t[) = 0$ (comparer avec l'exercice 97). Pour prouver la condition suffisante on suppose que $[a, b[= \bigsqcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[$. Alors pour tout N on a $[a, b[\supset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[$ et par suite $\mu([a, b[) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \mu([a_k, b_k[)$ en vertu de l'additivité et de la monotonie de μ. En faisant tendre N vers l'infini, on obtient $\mu([a, b[) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu([a_k, b_k[)$. Prouvons l'inégalité inverse. Pour tout $\varepsilon > 0$ choisissons des nombres positifs δ, δ_1, $\delta_2, \ldots$ tels que $F(b)-F(B-\delta) < \varepsilon$, $F(a_k)-F(a_k-\delta_k) < \varepsilon/2^k$. Ceci est possible, puisque F est continue à gauche. On remarquera maintenant que l'intervalle $[a, b-\delta]$ est entièrement recouvert par les intervalles $]a_k-\delta_k, b_k[$. Il existe donc un N tel que les N premiers intervalles recouvrent cet intervalle. D'où $\mu([a, b-\delta[) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \mu([a_k-\delta_k, b_k[)$, puisque $[a, b-\delta[\subset [a, b-\delta] \subset \subset \bigsqcup_{k=1}^{N} [a_k-\delta_k, b_k[\subset \bigsqcup_{k=1}^{N} [a_k-\delta_k, b_k[$. Ceci et les inégalités précédentes entraînent : $\mu([a, b[) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \mu([a_k, b_k[)+2\varepsilon$. C.q.f.d.

Signalons un *exemple* important : $F(t) \equiv t$. Dans ce cas la mesure sur S est confondue avec la longueur ordinaire et son prolongement μ^* à $L(S)$ s'appelle *mesure de Lebesgue* sur **R**.

Voici un autre *exemple :* soit $[t]$ la partie entière de t, c'est-à-dire le plus grand entier $\leqslant t$. Posons $F(t) = -[-t]$. Il est immédiat de vérifier que $F(t)$ est continue à gauche. La mesure correspondante est prolongeable à toutes les parties de **R** par la formule

$$\mu(A) = \text{nombre des points entiers de } A.$$

Décrivons maintenant les charges définies sur $R_\sigma(S)$, où S est le semi-anneau des intervalles semi-ouverts envisagés plus haut. Pour toute charge ν posons

$$F_\nu(t) = \begin{cases} \nu([0, t[) & \text{pour} \quad t > 0, \\ 0 & \text{pour} \quad t = 0 \\ -\nu([t, 0[) & \text{pour} \quad t < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Pour décrire l'ensemble des fonctions F_ν sur **R** associés aux charges ν nous aurons besoin de la

Définition. On appelle *variation* d'une fonction f sur $[a, b]$ la quantité

$$\mathrm{Var}_a^b f = \sup \sum_{k=1}^{n-1} |f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})|,$$

$$a = \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_n = b,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les ensembles finis de points $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sur $[a, b]$. On désigne par $V[a, b]$ l'ensemble des fonctions à variation bornée.

Théorème 5. *Pour qu'une fonction réelle f sur $[a, b]$ soit à variation bornée, il faut et il suffit qu'elle soit représentable par une différence de deux fonctions monotones.*

Démonstration. Pour les fonctions monotones, la variation est confondue avec l'accroissement : $\mathrm{Var}_a^b f = |f(b)-f(a)|$ (voir exercice 208). Donc, toutes les fonctions monotones et leurs combinaisons linéaires possèdent une variation bornée. Réciproquement, soit $\mathrm{Var}_a^b f < \infty$. Posons $\varphi(t) = \mathrm{Var}_a^t f$. Il est clair que φ est une fonction croissante. En outre, en considérant la collection élémentaire de points $\xi_1 = a$, $\xi_2 = b$, on constate que $\mathrm{Var}_a^b f \geqslant |f(b)-f(a)|$. D'où $\varphi(t_1)-\varphi(t_2) = \mathrm{Var}_{t_1}^{t_2} f \geqslant |f(t_1)-f(t_2)|$ pour $t_1 > t_2$, c'est-à-dire la fonction $\psi(t) = \varphi(t)-f(t)$ est croissante aussi. Donc, $f(t) = \varphi(t)-\psi(t)$ est la différence de deux fonctions monotones.

Théorème 6. *Pour qu'une fonction F sur* **R** *soit associée à une charge ν par la formule* (2), *il est nécessaire et suffisant qu'elle vérifie les conditions :*

1) $F(0) = 0$;
2) *F est continue à gauche* ;
3) *F est à variation bornée sur tout intervalle.*

Démonstration. La suffisance résulte des théorèmes 4 et 5. En effet, écrivons F sous la forme d'une différence de deux fonctions croissantes F_+ et F_-. Il est clair que si F vérifie les conditions 1) et 2), alors F_+ et F_- peuvent être choisies de façon à y satisfaire aussi.

D'après le théorème 4, les fonctions F_+ et F_- sont associées à des mesures σ-additives μ_+, μ_-. Alors la fonction $F = F_+ - F_-$ est associée à la charge $\mu_+ - \mu_-$.

La nécessité de la condition 1) est évidente, celle de la condition 2) se démontre comme dans le théorème 4. Prouvons la nécessité de 3). On remarquera à cet effet que par définition de la variation de la charge ν on a $\mathrm{Var}_a^b F_\nu = |\nu|([a, b[)$. Donc, la proposition voulue est un cas particulier du théorème général de finitude de la variation d'une charge (voir exercice 138). C.q.f.d.

Soient X et Y deux ensembles, $S \subset \mathcal{P}(X)$ et $T \subset \mathcal{P}(Y)$, deux semi-anneaux, μ et ν, des mesures sur S et T. Considérons le semi-anneau $S \times T \subset \mathcal{P}(X \times Y)$, des ensembles de la forme $A \times B$, $A \in S$, $B \in T$ (voir exercice 79) et définissons sur lui une fonction $\mu \times \nu$ en posant

$(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B)$. Il est immédiat de vérifier que cette fonction est additive.

Théorème 7. *Si les mesures μ et ν sont σ-additives, la mesure $\mu\times\nu$ le sera également.*

Nous ferons la démonstration de ce théorème après l'exposition de la théorie de l'intégration (voir chapitre II, § 3, n° 3).

Il est clair qu'un théorème analogue est valable pour le produit d'un nombre fini quelconque de mesures. Ce théorème est vrai pour un produit infini moyennant quelques contraintes subsidiaires.

Soient donnés un ensemble d'indices A et pour chaque $\alpha \in A$ un ensemble non vide X_α, un semi-anneau $S_\alpha \subset \mathcal{P}(X_\alpha)$ et une mesure σ-additive μ_α sur S_α. Supposons que pour tous les $\alpha \in A$, à l'exception d'un nombre fini, le semi-anneau S_α contient l'ensemble X_α et $\mu_\alpha(X_\alpha) = 1$. Posons $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ et appelons *cylindriques* les sous-ensembles $Y \subset X$ de la forme

$$Y = \prod_{\alpha\in A_0} Y_\alpha \times \prod_{\alpha\in A\setminus A_0} X_\alpha, \tag{3}$$

où A_0 est un sous-ensemble fini quelconque de A contenant tous les indices α pour lesquels $\mu(X_\alpha) \neq 1$ et Y_α, un sous-ensemble quelconque de S_α. Pour Y de la forme (3) posons

$$\mu(Y) = \prod_{\alpha\in A_0} \mu_\alpha(Y_\alpha).$$

Théorème 8. *Les sous-ensembles cylindriques forment un semi-anneau S sur lequel μ est une mesure σ-additive.*

Une démonstration est accessible par exemple dans [15].

Il existe un cas important où la σ-additivité de la mesure produit (et même de mesures plus générales) s'établit de façon très simple.

Lemme. *Supposons que $A = \mathbf{N}$ et que tous les X_n, $n \in \mathbf{N}$, sont des ensembles finis. Alors la relation $Y = \bigsqcup_k Y_k$ n'a lieu pour des ensembles cylindriques non vides que si la somme est finie.*

Corollaire. Toute mesure additive sur le semi-anneau S est σ-additive.

Démonstration du lemme. Munissons $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ d'une métrique telle que tous les ensembles cylindriques soient ouverts, fermés et compacts. La proposition du lemme découlera alors de la propriété fondamentale des compacts. La métrique cherchée peut être définie comme suit. On représentera tout élément $x \in X$ par la suite $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$. Posons

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = y, \\ 1/k, & \text{où } k \text{ est le plus petit indice} \\ & \text{pour lequel } x_k \neq y_k. \end{cases}$$

Il est clair que la boule fermée de rayon $1/k$ et de centre x est confondue avec la boule ouverte de rayon $1/(k+1)$ et est un ensemble cylindrique. D'où il résulte que les ensembles cylindriques sont ouverts et fermés. Leur

compacité découle de la compacité de X, compacité qui à son tour se démontre facilement par l'exhibition d'un ε-réseau fini pour tout $\varepsilon > 0$. (Pour la compacité voir le chapitre III, § 2, n° 2.)

Exemple. Sur l'ensemble X des fractions décimales infinies de la forme $x = 0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ on peut définir une mesure comme plus haut en posant $X_k = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $S_k = \mathcal{P}(X_k)$, $\mu_k(Y) = \frac{1}{10}$ card Y, où card Y est le nombre d'éléments de Y. On vérifie que le prolongement-Lebesgue de cette mesure est confondu généralement avec la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$ (voir exercice 115).

Voici un exemple très intéressant de mesures en physique (mouvement brownien). Dans l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ considérons les parties de la forme

$$X(t_1, \ldots, t_n ; \Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \{x \in C[a, b] \mid x(t_k) \in \Delta_k\},$$

où $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ sont des points de l'intervalle $[a, b]$, $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, des intervalles de la droite réelle. On vérifie immédiatement que ces ensembles forment un semi-anneau S. La formule

$$\mu(X(t_1, \ldots, t_n ; \Delta_1, \ldots, \Delta_n)) = \pi^{\frac{1-n}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^{-1/2} \times$$
$$\times \int_{\Delta_1} \ldots \int_{\Delta_n} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\tau_{k+1} - \tau_k)^2}{(t_{k+1} - t_k)}\right\} d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

définit sur S une mesure σ-additive. Pour $n = 1$ cette formule doit être comprise comme suit :

$$\mu(X(t, \Delta)) = \int_{\Delta} d\tau = |\Delta|.$$

Le prolongement-Lebesgue de la mesure μ s'appelle *mesure de Wiener* sur C $[a, b]$. Cette mesure possède beaucoup de propriétés intéressantes. Signalons, par exemple, que les fonctions différentiables en un point au moins de l'intervalle $[a, b]$ forment un ensemble de mesure nulle.

La mesure de Wiener (ou plus exactement la mesure μ_0 qui lui est rattachée, voir exercice 204) admet l'interprétation physique suivante : c'est la probabilité qu'une particule en mouvement brownien sur une droite se trouve dans les intervalles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ respectivement aux instants $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Donc, le graphe du mouvement de cette particule est presque sûrement celui d'une fonction continue nulle part dérivable sur $[a, b]$.

§ 2. Fonctions mesurables

1. Propriétés des fonctions mesurables. Soient donnés un ensemble X et une σ-algèbre $\mathfrak{A} \subset P(X)$. On dit qu'une fonction réelle f sur X est $\mathfrak{A}$-*mesurable* si pour tout $c \in \mathbf{R}$ l'ensemble

$$E_c(f) = \{x \in X : f(x) < c\}$$

(dit *ensemble de Lebesgue* de la fonction f) appartient à $\mathfrak{A}$. On démontre (voir exercice 139) que l'on peut remplacer dans cette définition le signe $<$ par l'un quelconque des signes $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ (mais pas par le signe $=$).

Une fonction complexe $f(x) = u(x)+iv(x)$ est dite $\mathfrak{A}$-*mesurable* si sa partie réelle $u(x)$ et sa partie imaginaire $v(x)$ le sont. Plus généralement : une fonction vectorielle $\xi(x)$ à valeurs dans un espace vectoriel réel L de dimension finie est $\mathfrak{A}$-*mesurable* s'il en est de même pour tous les coefficients $\xi_i(x)$ du développement $\xi(x) = \xi_1(x)e_1+ \ldots +\xi_n(x)e_n$ dans une base $e_1, \ldots, e_n$. Cette définition est indépendante du choix de la base dans L (voir exercice 161).

Quand on envisagera un espace X muni d'une mesure μ définie sur une σ-algèbre $\mathfrak{A} \subset P(X)$ au lieu de fonction « $\mathfrak{A}$-*mesurable* » on dira « μ-*mesurable* » ou simplement *mesurable*. Les propriétés fondamentales des fonctions mesurables sont décrites par le

Théorème 9. *L'ensemble des fonctions mesurables forme une algèbre fermée pour la convergence presque partout.*

Démonstration. Si une fonction f est mesurable, les fonctions λf, $|f|$ et f^2 le sont aussi en vertu du lemme général suivant.

Lemme. *Si f est une fonction mesurable et g est une fonction continue, alors la fonction composée $g(f(x))$ est mesurable.*

La démonstration découle de l'assertion de l'exercice 143. Supposons que f_1 et f_2 sont des fonctions mesurables. Prouvons que leur somme f_1+f_2 l'est aussi. Pour cela on remarquera que l'ensemble de Lebesgue $E_c(f_1+f_2)$ peut être représenté par la réunion d'un nombre dénombrable d'ensembles mesurables :

$$E_c(f_1+f_2) = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} (E_r(f_1) \cap E_{c-r}(f_2)),$$

où $\mathbf{Q}$ est l'ensemble des rationnels.

La mesurabilité du produit $f_1 f_2$ résulte de ce qui précède et de l'identité $f_1 f_2 = \frac{(f_1+f_2)^2}{4} - \frac{(f_1-f_2)^2}{4}$. De façon analogue, l'identité $\max(f_1, f_2) = \frac{1}{2}(f_1+f_2)+\frac{1}{2}|f_1-f_2|$ nous dit que le maximum de deux, donc d'un nombre fini quelconque, de fonctions mesurables est mesurable. Soit $\{f_n\}$ une suite non croissante de fonctions mesurables, f, sa limite. Alors l'ensemble $E_c(f)$ est la réunion des ensembles $E_c(f_n)$ et, par suite, est mesurable. Donc, l'algèbre des fonctions mesurables est fermée pour les passages à la limite monotones. Mais on sait que tout passage à la limite peut être remplacé par deux passages monotones. Plus exactement,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{k \to \infty} \max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x)\}.$$

Il est évident que si f_1 est mesurable et f_2 est confondue presque partout avec f_1, alors f_2 est mesurable aussi, c.q.f.d.

2. Convergences des fonctions mesurables. On peut définir plusieurs types de convergence pour les fonctions mesurables. Les plus fréquents sont les trois suivants :

1) La *convergence uniforme* sur l'ensemble X désignée par $f_n \rightrightarrows f$:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

2) La *convergence presque partout* (pour la mesure μ), notée $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$:

$$f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty,$$

pour tous les x situés en dehors d'un sous-ensemble de mesure nulle.

3) La *convergence en mesure*, notée $f_n \xrightarrow{\mu} f$ signifiant que pour tout $\varepsilon > 0$ la mesure de l'ensemble $A_n(\varepsilon) = \{x \in X\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ tend vers 0 pour $n \to \infty$.

Les trois types de convergence cités sont reliés entre eux. Il est clair que la convergence uniforme entraîne la convergence presque partout et la convergence en mesure.

Théorème 10. *Si une suite f_n converge vers f presque partout sur X et $\mu(X) < \infty$, alors $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Démonstration. Soit $A_n(\varepsilon) = \{x \in X\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Posons $B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k \geqslant n} A_k(\varepsilon)$. Il est clair que $B_1(\varepsilon) \supset B_2(\varepsilon) \supset \ldots \supset B_n(\varepsilon) \supset \ldots$ Soit $B(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon)$. Si $x \in B(\varepsilon)$, alors $x \in A_n(\varepsilon)$ pour des n aussi grands que l'on veut. Il s'ensuit que $f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$ pour $n \to \infty$. Donc l'ensemble $B(\varepsilon)$ est de mesure nulle. Or, $\mu(B(\varepsilon)) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n(\varepsilon))$ (voir exercice 97). Comme $\mu(A_n(\varepsilon)) \leqslant \mu(B_n(\varepsilon))$ on voit que $\mu(A_n(\varepsilon)) \to 0$ pour $n \to \infty$, c'est-à-dire $f_n \xrightarrow{\mu} f$, c.q.f.d.

Ainsi, la convergence uniforme implique la convergence presque partout, et la convergence presque partout (sur un ensemble de mesure finie), la convergence en mesure. Les réciproques ne sont pas vraies (voir exercices 162, 163, 168). Il est important et intéressant de remarquer que ces assertions sont vraies si l'on « corrige » la suite $\{f_n\}$ ou l'ensemble X. Plus exactement on a le

Théorème d'Egorov. *Si $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ sur X et $\mu(X) < \infty$, alors pour tout $\sigma > 0$ il existe une partie $E_\sigma \subset X$ telle que $\mu(E_\sigma) < \sigma$ et $f_n \rightrightarrows f$ en dehors de E_σ.*

Théorème 11. *Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ sur X il existe une suite partielle $\{n_k\}$* de la série naturelle telle que

$$f_{n_k} \xrightarrow{\text{p.p.}} f \text{ sur } X \quad \text{pour} \quad k \to \infty.$$

Démonstration du théorème d'Egorov. Nous utilisons les notations $A_n(\varepsilon)$ et $B_n(\varepsilon)$ de la démonstration du théorème 10. Nous avons vu que pour tout $\varepsilon > 0$ $\mu(B_n(\varepsilon)) \to 0$ pour $n \to \infty$. Donc, pour tout k il existe un indice $N(k)$ tel que $\mu(B_{N(k)}(1/k)) < \sigma/2^k$. Pour E_σ prenons l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{N(k)}(1/k)$. Alors $\mu(E_\sigma) < \sigma$ et pour $n > N(k)$ on a $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ pour $x \notin E_\sigma$.

Démonstration du théorème 11. Nous conservons les notations précédentes. Pour chaque k choisissons un indice n_k tel que $\mu(B_{n_k}(1/k)) < 1/2^k$ et montrons que la suite partielle n_k est la suite cherchée. En effet, l'ensemble des x pour lesquels $f_{n_k}(x)$ ne tend pas vers $f(x)$ pour $k \to \infty$ est contenu dans $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, B_{n_k}(1/k)$ et par suite est de mesure nulle.

§ 3. Intégrale

1. L'intégrale de Lebesgue. Soient donnés un ensemble X, une σ-algèbre $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ et une mesure σ-additive μ sur $\mathfrak{A}$. On dit qu'une fonction mesurable f sur X (réelle ou complexe) est *simple* si elle prend un nombre au plus dénombrable de valeurs. Une telle fonction peut être représentée par une combinaison linéaire dénombrable de fonctions caractéristiques :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{A_k}(x), \tag{4}$$

A_k étant supposés mesurables et $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Remarque. Si toutes les valeurs c_k sont deux à deux distinctes, alors la mesurabilité de A_k résulte de celle de f. De plus f se représente de façon unique sous la forme (4). Cependant, il est préférable de ne pas exiger que c_k soient distinctes.

Une fonction f de la forme (4) est dite *sommable* sur X si converge la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, \mu(A_k). \tag{5}$$

On vérifie que cette définition et celle de l'intégrale, qui suit plus bas, ne dépendent pas du choix de la représentation (4) (voir exercice 189).

Soit $A \subset \mathfrak{A}$; définissons l'*intégrale* de $f(x)$ sur l'ensemble A par la formule

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu(A \cap A_k). \tag{6}$$

La convergence de cette série résulte de la sommabilité de f.

On désignera par $S(X, \mu)$, ou simplement par $S(X)$ si aucune confusion n'est à craindre, l'ensemble de toutes les fonctions simples sommables sur X. Si l'on a besoin de spécifier que l'on considère des fonctions complexes ou réelles on utilisera respectivement les notations $S^{\mathbf{R}}(X)$ et $S^{\mathbf{C}}(X)$. Le théorème suivant décrit les propriétés fondamentales des fonctions simples.

Théorème 12. 1) *L'ensemble $S(X)$ est un espace vectoriel.*

2) *La correspondance $f \mapsto \int_A f(x)\, d\mu$ est une fonctionnelle linéaire sur $S(X)$.*

3) *La correspondance* $A \mapsto \int_A f(x)\,d\mu$ *est une charge sur* $\mathfrak{A}$.

4) *La quantité* $d_1(f, g) = \int_X |f(x)-g(x)|\,d\mu(x)$ *possède toutes les propriétés de la distance à l'exception peut-être de la séparabilité.*

5) *La majoration* $\left|\int_A f\,d\mu - \int_A g\,d\mu\right| \leqslant d_1(f, g)$ *est valable pour tous les* $f, g \in S(x)$ *et tous les* $A \in \mathfrak{A}$.

Démonstration. Les propositions 1), 2), 4) et 5) découlent immédiatement de la définition (comparer avec l'exercice 185). Prouvons 3). Si f est la fonction caractéristique d'un ensemble $B \in \mathfrak{A}$, la correspondance $A \to \int_A f\,d\mu = \mu(A \cap B)$ est une mesure σ-additive, donc une charge sur $\mathfrak{A}$. D'après l'exercice 123, cette proposition est valable également pour les combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques et pour leurs limites pour la distance d_1, c.q.f.d.

Dans la suite, nous identifierons les fonctions confondues presque partout sans le spécifier expressément. Cette identification fait de l'ensemble $S(X)$ un espace métrique muni de la distance d_1. On s'assure immédiatement que cet espace peut ne pas être complet (voir exercice 190). Nous verrons plus bas que la complétion de $S(X, \mu)$, admet une réalisation évidente sous forme d'un espace de fonctions sur X (plus exactement sous forme de classes d'équivalence de telles fonctions).

Définition. On dit qu'une fonction f sur X est *sommable pour la mesure* μ si existe une suite $\{f_n\} \subset S(X, \mu)$, telle que

1) la suite $\{f_n\}$ est fondamentale dans $S(X, \mu)$ pour la distance d_1 ;

2) $f_n \to f$ presque partout pour la mesure μ sur X.

Il est clair que si la fonction f est sommable et g est une fonction équivalente à f, alors g sera également sommable (il suffit de considérer la même suite $\{f_n\}$). L'espace des classes d'équivalence des fonctions sommables est noté $L_1(X, \mu)$.

Prouvons que si $\mu(X) < \infty$, toute fonction f mesurable bornée appartient à $L_1(X, \mu)$. En effet, soit $E_{kn}(f) = \{x \in X : k/n \leqslant f(x) < (k+1)/n\}$. Posons $f_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} \chi_{E_{kn}}(x)$. (En fait, cette somme est finie, puisque f est bornée.) Il est évident que $|f_n(x)-f(x)| < 1/n$, de sorte que $f_n \rightrightarrows f$ et à fortiori $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$. De plus, $\{f_n\}$ est fondamentale, puisque $d_1(f_n, f_m) = \int_X |f_n(x)-f_m(x)|\,d\mu \leqslant \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\mu(X)$. (Nous utilisons la proposition 3) de l'exercice 185.)

Le résultat obtenu admet une généralisation. On dira qu'une fonction mesurable f sur X est *essentiellement bornée* si existe une constante C telle que $|f(x)| \leqslant C$ presque partout sur X.

La plus petite de ces constantes (prouver son existence !) s'appelle *borne supérieure essentielle* de la fonction $|f|$ et se note ess sup $|f(x)|$.

La quantité $d_\infty(f, g) = \text{ess sup}\,|f(x)-g(x)|$ possède toutes les propriétés de la distance à l'exception de la séparabilité. L'espace quotient correspondant des classes d'équivalence de fonctions essentiellement bornées est noté $L_\infty(X, \mu)$. Cet espace est complet pour la distance d_∞. La sommabilité d'une fonction essentiellement bornée sur un ensemble de mesure finie se démontre comme celle d'une fonction bornée. Donc, pour $\mu(X) < \infty$, on a

$$L_\infty(X, \mu) \subset L_1(X, \mu).$$

Construisons maintenant une intégrale de fonctions sommables. Pour cela nous aurons besoin du

Lemme. *Si $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont des suites fondamentales dans $S(X, \mu)$, presque partout convergentes vers une même fonction $h \in L_1(X, \mu)$, alors $d_1(f_n, g_n) \to 0$ pour $n \to \infty$.*

Démonstration. Supposons que $\varphi_n = f_n - g_n$. Alors $\{\varphi_n\}$ est une suite fondamentale dans $S(X, \mu)$ et $\varphi_n \xrightarrow{\text{p.p.}} 0$. Nous devons prouver que $\int_X |\varphi_n|\, d\mu \to 0$. Supposons le contraire. Il existe alors un $\delta > 0$ et une suite partielle $\{n_k\}$ telle que $\int_X |\varphi_{n_k}|\, d\mu \geqslant \delta$ pour tous les k. En réindexant et en multipliant toutes les fonctions par δ^{-1} on peut considérer que les inégalités $\int_X |\varphi_n|\, d\mu \geqslant 1$ sont réalisées pour tous les n pour la suite initiale.

Choisissons maintenant dans $\{\varphi_n\}$ une suite partielle $\{\varphi_{n_k}\}$ dite « rapidement convergente » telle que

$$d_1(\varphi_{n_k}, \varphi_{n_{k+1}}) \leqslant 1/2^k.$$

Pour cela il suffit de prendre pour n_k l'indice à partir duquel la distance entre les termes de la suite $\{\varphi_n\}$ est $\leqslant 1/2^k$. En réindexant encore la suite on peut considérer que $d_1(\varphi_n, \varphi_{n+1}) \leqslant 1/2^{n+2}$. On se rappelle que la fonction φ_1 est une fonction simple de la forme (4) :

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{A_k}(x).$$

Comme $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \int_X |\varphi_1(x)|\, d\mu(x) \geqslant 1$, il existe un N tel que $\sum_{k=1}^{N} |c_k| \geqslant 3/4$. Posons $A = \bigsqcup_{k=1}^{N} A_k$ et supposons que $C = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} |c_k| = \max_{x \in A} |\varphi_1(x)|$. Le théorème d'Egorov nous dit que dans l'ensemble A on peut exhiber une partie E telle que $\mu(E) < 1/(4C)$ et $\varphi_n \rightrightarrows 0$ sur l'ensemble $B = A \backslash E$. Alors $\int_B |\varphi_n|\, d\mu \to 0$. D'autre part,

$$\int_B |\varphi_1|\,d\mu \geqslant \int_A |\varphi_1|\,d\mu - \int_E |\varphi_1|\,d\mu \geqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{4C}\cdot C = \frac{1}{2},$$

$$\int_B |\varphi_1|\,d\mu - \int_B |\varphi_{n+1}|\,d\mu \leqslant d_1(\varphi_n, \varphi_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Donc

$$\int_B |\varphi_n|\,d\mu \geqslant \int_B |\varphi_1|\,d\mu - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_B |\varphi_k|\,d\mu - \int_B |\varphi_{k+1}|\,d\mu\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n+2}} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Cette contradiction prouve le lemme.

Corollaire. La fonctionnelle $I_A(f) = \int_A f(x)\,d\mu(x)$, *définie pour tout* $A \in \mathfrak{A}$ *sur l'espace* $S(X, \mu)$ *est prolongeable par continuité en une fonctionnelle sur l'espace* $L_1(X, \mu)$.

En effet, si $f \in L_1(X, \mu)$ et $\{f_n\}$ est une suite fondamentale dans $S(X, \mu)$, convergente presque partout vers f, on peut poser

$$I_A(f) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,d\mu(x).$$

Le lemme prouvé nous dit que la limite du second membre est indépendante du choix de la suite $\{f_n\}$.

La fonctionnelle ainsi construite s'appelle *intégrale de Lebesgue* de la fonction mesurable f sur l'ensemble A et se note $\int_A f(x)\,d\mu(x)$.

Théorème 13. 1) *L'ensemble* $L_1(X, \mu)$ *est un espace vectoriel.*

2) *Pour tout ensemble* $A \in \mathfrak{A}$ *la correspondance* $f \mapsto \int_A f(x)\,d\mu(x)$ *est une fonctionnelle linéaire sur* $L_1(X, \mu)$.

3) *Pour toute fonction* $f \in L_1(X, \mu)$ *la quantité* $\nu(A) = \int_A f(x)\,d\mu(x)$ *est une charge sur* $\mathfrak{A}$.

4) *La quantité* $d_1(f, g) = \int_X |f-g|\,d\mu$ *possède toutes les propriétés de la distance sur* $L_1(X, \mu)$.

Démonstration. Soient f et g des fonctions sommables, $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ des suites fondamentales de fonctions simples convergentes presque partout vers f et g. Alors la suite $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$ est fondamentale et converge presque partout vers $\alpha f + \beta g$. Ceci prouve 1). La proposition 2) résulte de $\int_A (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \lim_n \int_A (\alpha f_n + \beta g_n)\,d\mu = \alpha \lim_n \int_A f_n\,d\mu + \beta \lim_n \int_A g_n\,d\mu =$ $= \alpha \int_A f\,d\mu + \beta \int_A g\,d\mu$. La proposition 3) se démontre comme la proposi-

tion analogue du théorème 12. Enfin, la proposition 4) se déduit par un passage à la limite à partir des propriétés correspondantes de d_1 dans l'espace $S(X, \mu)$.

Remarque 1. Nous montrons plus bas que l'espace $L_1(X, \mu)$ est complet pour la distance d_1. Signalons que dans de nombreux problèmes d'analyse fonctionnelle l'espace $L_1(X, \mu)$ apparaît naturellement comme la complétion de telle ou telle classe de fonctions pour la métrique intégrale d_1. Le fait que les points de cet espace peuvent être réalisés par des classes d'équivalence de fonctions sommables joue un rôle secondaire.

Remarque 2. Il existe plusieurs procédés de généralisation de l'intégrale de fonctions simples aux fonctions sommables (voir à ce propos les exercices 195, 196, 197).

2. Fonctions à variation bornée et intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Soient φ et f deux fonctions réelles sur l'intervalle $[a, b]$. Pour toute partition $T = (t_0 = a < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b)$ de l'intervalle $[a, b]$ et toute collection de points $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, telles que $t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, formons la *somme intégrale de Riemann-Stieltjes :*

$$S(T, \xi, f, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]. \tag{7}$$

Appelons *pas* de la subdivision T la quantité $\lambda(T) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (t_i - t_{i-1})$. La limite

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} S(T, \xi, f, \varphi), \tag{8}$$

si elle existe, s'appelle *intégrale de Riemann-Stieltjes* et se note

$$\int_a^b f(t)\, d\varphi(t).$$

Le théorème classique de Stieltjes affirme qu'une condition suffisante d'existence de cette intégrale est que la fonction φ soit à une variation bornée sur l'intervalle $[a, b]$ et que la fonction f soit continue sur cet intervalle. Signalons que dans le cas particulier où $\varphi(t) = t$, l'intégrale de Riemann-Stieltjes se transforme en une intégrale ordinaire de Riemann.

La condition imposée à φ d'être à variation bornée est naturelle, sinon l'expression (7) serait infinie déjà pour les fonctions f constantes par morceaux prenant les valeurs ± 1. Donc, dans la suite nous n'envisagerons pour φ que des fonctions à variation bornée. D'autre part, si les fonctions f et φ possèdent un point commun de discontinuité, on s'assure immédiatement que la limite (8) n'existe pas. Si la fonction f est continue en un point de discontinuité de φ, la valeur de φ en ce point est sans effet sur la quantité (7) (voir exercice 223). Par conséquent, nous pouvons admettre dans la suite que la fonction φ est continue à gauche. A toute fonction φ est associée une charge ν (voir théorème 6).

L'intégrale de la fonction f par rapport à cette charge s'appelle *intégrale de Lebesgue-Stieltjes*. Nous la désignerons par $\int_a^b f(x)\,dv(x)$. On a le

Théorème 14. *Pour que l'intégrale de Riemann-Stieltjes* $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ *existe, il est nécessaire et suffisant que f soit bornée et presque partout continue sur $[a, b]$ par rapport à la mesure $|v|$. Dans ce cas l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes* $\int_a^b f(x)\,dv(x)$ *est également définie et sa valeur est confondue avec celle de l'intégrale de Riemann-Stieltjes.*

Démonstration. *Nécessité.* Ecrivons φ sous la somme d'une fonction continue φ_0 et d'une fonction des sauts φ_1 (voir exercice 215). Alors la charge v sera aussi une somme de charges v_0 et v_1. Comme déjà signalé, la fonction f doit être continue aux points de discontinuité de φ. Donc l'ensemble Ω_f des points de discontinuité de f est $|v_1|$-négligeable. Montrons qu'il est aussi $|v_0|$-négligeable. Supposons que $\omega_f[\alpha, \beta]$ représentent l'*oscillation de la fonction f sur l'intervalle* $[\alpha, \beta]$ et $\omega_f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega_f[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ est l'*oscillation de f au point x*. Désignons par $\Omega_f(\delta)$ l'ensemble des points où l'oscillation de la fonction f est supérieure à δ :

$$\Omega_f(\delta) = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geqslant \delta\}.$$

Il est évident que $\Omega_f = \bigcup_{\delta > 0} \Omega_f(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_f\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc, il suffit de prouver que chaque ensemble $\Omega_f(\delta)$ est $|v_0|$-négligeable pour $\delta > 0$. Soit donné $\varepsilon > 0$. Il existe une partition $T = (t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b)$ assez fine pour que

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_0(t_i) - \varphi_0(t_{i-1})| > |v_0|([a, b]) - \varepsilon.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \{|v_0|([t_{i-1}, t_i]) - |\varphi_0(t_i) - \varphi_0(t_{i-1})|\} < \varepsilon. \tag{9}$$

Quitte à raffiner la partition T on peut admettre que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f[t_{i-1}, t_i]\,|\varphi_0(t_i) - \varphi_0(t_{i-1})| < \varepsilon\delta, \tag{10}$$

puisque la fonction f est intégrable et l'expression du premier membre de (10) peut être représentée sous la forme

$$\sup_{\xi_1, \xi_2} [S(T, \xi_1, f, \varphi) - S(T, \xi_2, f, \varphi)].$$

Considérons les termes de la somme (10) qui correspondent aux intervalles de la partition de $[t_{i-1}, t_i]$ contenant les points de l'ensemble $\Omega_f(\delta)$.

Pour ces termes, la quantité $\omega_f[t_{i-1}, t_i]$ est bornée inférieurement par une constante δ. Donc, (10) entraîne que

$$\Sigma' |\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})| < \varepsilon,$$

où la somme est étendue aux intervalles de la partition mentionnés.

De (9) il résulte que $\Sigma' |\nu_0| ([t_{i-1}, t_i]) < 2\varepsilon$, c'est-à-dire la $|\nu_0|$-mesure globale des intervalles indiqués est inférieure à 2ε.

Mais ces intervalles recouvrent l'ensemble $\Omega_f(\delta)$ tout entier, sauf peut-être un nombre de points fini confondus avec les points de la partition T. Comme la $|\nu_0|$-mesure d'un point est nulle (la fonction φ_0 est continue) on voit que $|\nu_0(\Omega_f(\delta))| < 2\varepsilon$.

Suffisance. Supposons que la charge ν est représentée sous la forme $\mu_+ - \mu_-$, où μ_+ et μ_- sont des mesures finies sur l'intervalle $[a, b]$ et $|\nu| = \mu_+ + \mu_-$.

Si $|\nu| (\Omega_f) = 0$, alors $\mu_+(\Omega_f) = \mu_-(\Omega_f) = 0$. D'autre part, si la fonction φ est μ_+-intégrable et μ_--intégrable, alors elle est ν-intégrable. Ceci montre que dans la démonstration de la suffisance on peut se borner aux cas d'une charge positive (ou d'une fonction monotone φ). Dans ce cas, de même que dans la théorie ordinaire de l'intégrale de Riemann, nous pouvons utiliser le critère de Darboux : une condition suffisante d'intégrabilité de f est que la borne inférieure en T de l'expression du premier membre de (10) soit nulle.

Soit donné $\varepsilon > 0$. Désignons par M l'oscillation de la fonction f sur $[a, b]$ et par V la variation de la fonction φ sur $[a, b]$. L'ensemble $\Omega_f(\delta)$ est de mesure nulle pour tout $\delta > 0$. D'autre part, cet ensemble est fermé, donc compact. Par conséquent, on peut le recouvrir par un nombre fini d'intervalles dont la somme des mesures est $\leqslant \varepsilon/(2M)$. L'oscillation de f est inférieure à δ en tous les points de la partie restante de l'intervalle $[a, b]$. On montre immédiatement (l'analogue du théorème de continuité uniforme d'une fonction continue sur un intervalle) qu'il existe une partition de cet ensemble en un nombre fini d'intervalles telle que l'oscillation de f soit $\leqslant \delta$ sur chaque intervalle de cette partition. Prenons pour δ la quantité $\varepsilon/(2V)$. Alors, pour la partition T construite, on peut majorer le premier membre de (10) par la constante $M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2V} \cdot V = \varepsilon$, c.q.f.d.

Pour calculer les intégrales de Riemann-Stieltjes et Lebesgue-Stieltjes il est commode d'utiliser les propriétés décrites dans les exercices 220, 223, 224, 225.

3. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue. Nous avons décrit plus haut (voir théorème 13) quelques propriétés importantes de l'intégrale de Lebesgue. Nous allons nous servir constamment de ces résultats. Nous considérons aussi les propriétés de l'intégrale rattachées au passage à la limite, aux produits de mesures et à la dérivation des charges.

Théorème 15. *(Théorème de Lebesgue de convergence bornée). Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions μ-sommables sur un ensemble X, bornée en module*

par une fonction φ fixée non négative μ-sommable sur X et convergente μ-presque partout sur X vers une fonction f.

Alors la fonction f est μ-sommable sur X et

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu$$

pour tout ensemble A μ-mesurable.

Démonstration. Pour tout ensemble mesurable A posons $\nu(A) = \int_A \varphi\, d\mu(x)$. La mesure ν est finie sur X en vertu du théorème 13.

Lemme. *Si une fonction g est mesurable et bornée sur X, alors la fonction $f = \varphi g$ est μ-sommable et $\int_A f(x)\, d\mu(x) = \int_A g(x)\, d\nu(x)$ pour tout ensemble A μ-mesurable.*

Démonstration. Considérons l'ensemble M des fonctions g sur X vérifiant le lemme. Il est évident que M contient toutes les fonctions caractéristiques des ensembles mesurables. En effet, si $g = \chi_B$, alors

$$\int_A f\, d\mu = \int_A \varphi\chi_B\, d\mu = \int_{A\cap B} \varphi\, d\mu = \nu(A\cap B) = \int_A g\, d\nu.$$

Donc M contient les combinaisons linéaires finies de telles fonctions. Soit maintenant g une fonction mesurable bornée sur X. Posons $g_-(x) = \frac{1}{n}[ng(x)]$, $g_+(x) = g_-(x) + \frac{1}{n}$. Alors $g_\pm(x) \in M$ et $g_-(x) \leqslant g(x) \leqslant g_+(x)$. Donc $\int_A g_-\, d\nu = \int_A \varphi g_-(x)\, d\mu(x) \leqslant \int_A \varphi g\, d\mu \leqslant \int_A \varphi g_+\, d\mu = \int_A g_+\, d\nu$. Pour $n \to \infty$ le premier et le dernier termes tendent vers $\int_A g\, d\nu$. Par conséquent, $g \in M$ et le lemme est démontré.

Revenons à la démonstration du théorème 15. Définissons les fonctions

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x)/\varphi(x) & \text{si} \quad \varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad \varphi(x) = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/\varphi(x) & \text{si} \quad \varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse du théorème, les fonctions $g_n(x)$ possèdent les propriétés : $|g_n(x)| \leqslant 1$, $g_n(x) \xrightarrow{\text{p.p.}} g$. Nous devons démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu = \int_A f\, d\mu$. En vertu du lemme ceci revient à affirmer que $\lim_{n\to\infty} \int_A g_n(x)\, d\nu = \int_A g\, d\nu$. Donc nous avons ramené la démonstration du théorème de Lebesgue au cas particulier où la mesure de l'espace X est finie et les fonctions considérées, bornées en module par une même constante. Dans ce cas, le théorème se déduit sans peine du théorème d'Egorov.

Théorème 16. *(Théorème de B. Lévi de convergence monotone). Soit $\{f_n\}$ une suite monotone croissante de fonctions μ-sommables sur un ensemble X. Posons $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (la valeur $+\infty$ est possible).*

1) *Si les intégrales $\int_X f_n(x)\,d\mu(x)$ sont bornées dans leur ensemble, alors la fonction $f(x)$ est sommable et $\int_X f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,d\mu(x)$.*

2) *Si $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,d\mu(x) = +\infty$, alors la fonction $f(x)$ n'est pas sommable.*

Démonstration. 1) En retranchant la fonction f_1 de toutes les fonctions f_n et de f, nous pouvons admettre que $f_n \geqslant 0$ et $f \geqslant 0$. Soit E l'ensemble où la fonction $f(x)$ prend la valeur $+\infty$. Alors $E = \bigcap_N \bigcup_n E_{Nn}$, où $E_{Nn} = \{x \in X : \ f_n(x) \geqslant N\}$. On a $\int_{E_{Nn}} f_n(x)\,d\mu \geqslant N\cdot\mu(E_{Nn})$. Comme $\int_X f_n(x)\,d\mu \leqslant C$ pour tous les n, on obtient $\mu(E_{Nn}) \leqslant C/N$; d'où $\mu(E) = \lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(E_{Nn}) = 0$.

Donc, la fonction f est presque partout finie. Montrons qu'elle est sommable. A cet effet, le moyen le plus simple est d'utiliser le résultat de l'exercice 197. Soit A un ensemble de mesure finie sur lequel $f(x)$ est bornée supérieurement. Alors

$$\int_A f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,d\mu(x) \leqslant C,$$

ce qui prouve la sommabilité de f. Le reste de la proposition 1) et la proposition 2) résultent du théorème de Lebesgue de convergence bornée.

Lemme de Fatou. *Si une suite $\{f_n\}$ de fonctions μ-sommables non négatives possède les propriétés suivantes :*

1) *$\int_X f_n(x)\,d\mu \leqslant C$ pour tous les n ;*

2) *$f_n(x) \to f(x)$ presque partout sur X, alors f est une fonction μ-sommable et $\int_X f\,d\mu \leqslant C$.*

Démonstration. Remplaçons le passage à la limite $f_n \to f$ par deux passages à la limite monotones. Plus exactement posons

$$g_{kn}(x) = \min\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x)\},$$
$$g_n(x) = \lim_{k\to\infty} g_{kn}(x).$$

Alors $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ pour presque tous les x. De la monotonie de l'intégrale il résulte que $\int_X g_n\,d\mu \leqslant C$, et du théorème 16, que f est sommable et $\int_X f\,d\mu \leqslant C$, ce qui prouve le lemme.

Etablissons la complétude annoncée de l'espace $L_1(X, \mu)$ à partir des propriétés obtenues de l'intégrale.

Théorème 17. *L'espace $L_1(X, \mu)$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite fondamentale dans $L_1(X, \mu)$. Quitte à passer à une suite partielle, on peut admettre que $\{f_n\}$ possède la propriété : $d_1(f_n, f_{n+1}) < 1/2^n$. Posons $\varphi_1 = f_1$, $\varphi_n = f_n - f_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. D'après le théorème 16, la série $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|$ est partout convergente vers une fonction $\varphi(x)$ sommable presque partout finie. Donc, la série $\sum \varphi_n(x)$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$. Il s'ensuit que $f_n \to f$ presque partout sur X. D'autre part, toutes les fonctions f_n sont bornées en module par la fonction $\varphi(x)$. Le théorème de convergence bornée (cf. théorème 15) nous dit que $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = 0$. Donc $f_n \to f$ dans l'espace $L_1(X, \mu)$, c.q.f.d.

Une autre propriété utile de l'intégrale de Lebesgue est la propriété de *continuité absolue.*

Théorème 18. *Soit $f \in L_1(X, \mu)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\mu(A) < \delta$ implique $\left| \int_A f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon$.*

Démonstration. Le théorème affirme en fait la continuité de l'application $I_f\colon A \to \int_A f(x)\, d\mu$ de l'espace métrique $L(X)$ des ensembles mesurables (voir exercice 100) dans **R**. Si χ est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble mesurable de mesure finie dans X, alors l'application I_χ est manifestement continue. Ceci vaut également pour I_f si f est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques. D'autre part, si $f_n \to f$ dans $L_1(X, \mu)$, alors $I_{f_n} \to I_f$ uniformément sur $L(X)$. Reste à utiliser le fait connu : la limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue, c.q.f.d.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 7 § 1, n° 3 relatif au produit de mesures. Supposons que (X, S, μ) et (Y, T, ν) sont les mêmes que dans le théorème indiqué. Pour chaque ensemble $C = A \times B$ du semi-anneau $S \times T$ posons $f_C(x) = \chi_A(x)\, \nu(B)$. Il est évident que $(\mu \times \nu)(C) = \mu(A) \times \nu(B) = \int_X f_C(x)\, d\mu$. Si l'ensemble C se représente sous la forme $C = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k$, $C_k \in S \times T$, alors la σ-additivité de ν entraîne l'égalité $f_C(x) = \sum_k f_{C_k}(x)$. D'après le théorème de Lebesgue de convergence bornée il résulte de cette égalité que

$$\int_X f_C(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_{C_k}(x)\, d\mu(x),$$

donc

$$(\mu\times\nu)(C) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu\times\nu)(C_k),$$

ce qui prouve le théorème 7.

Etudions plus en détail l'application $C \mapsto f_C$ introduite plus haut. Prolongeons-la à l'anneau $R(S\times T)$ par la formule

$$f_{\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k} = \sum_{k=1}^{n} f_{C_k}.$$

Il est immédiat de vérifier que

$$\| f_{C_1} - f_{C_2} \|_{L_1(X,\mu)} \leqslant (\mu\times\nu)(C_1 \triangle C_2).$$

(En effet, si $C_1 = A_1 \sqcup B$, $C_2 = A_2 \sqcup B$, où $B = C_1 \cap C_2$, alors $f_{C_1} - f_{C_2} = f_{A_1} - f_{A_2}$, $f_{C_1 \triangle C_2} = f_{A_1} + f_{A_2}$.)

Donc la correspondance $C \mapsto f_C$ se prolonge en une application de toute la σ-algèbre des ensembles $(\mu\times\nu)$-mesurables de $L(X\times Y)$ dans $L_1(X, \mu)$ par la formule $f_{\lim_n C_n} = \lim_n f_{C_n}$ (la première limite est considérée dans $L(X\times Y)$, la seconde, dans $L_1(X, \mu)$).

Lemme. *Soit $C \in L(X\times Y)$. Pour presque tous les $x \in X$ l'ensemble $C_x \subset Y$ défini par $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\}$ est mesurable par rapport à la mesure ν et $\nu(C_x) = f_C(x)$.*

Démonstration. Pour les ensembles élémentaires (c'est-à-dire les ensembles de l'anneau $R(S\times T)$) ceci est vrai par définition de f_C. D'autre part, si $\{C^{(n)}\}$ est une suite monotone d'ensembles, alors la σ-additivité de la mesure ν entraîne : $\nu\left(\lim_n C_x^{(n)}\right) = \lim_n \nu(C_x^{(n)})$. Par conséquent, la propriété $\nu(C_x) = f_C(x)$ est préservée par les passages à la limite monotones. Mais tout ensemble mesurable C peut être déduit, à un ensemble de mesure nulle près, à partir d'ensembles élémentaires par deux passages à la limite monotones. En effet, soit C_n un ensemble élémentaire approximant C avec une précision de 2^{-n} pour la mesure $\mu\times\nu$. Posons $\tilde{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n+k}$, alors $(\mu\times\nu)C \Big\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n+k} = 0$, $(\mu\times\nu)\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n+k} \Big\backslash C\right) \leqslant 2^{1-n}$. D'où $(\mu\times\nu)\times(\tilde{C} \triangle C) = 0$.

Donc f_C et $f_{\tilde{C}}$ sont confondues presque partout et, par suite, pour presque tous les $x \in X$ on a $f_C(x) = f_{\tilde{C}}(x) = \nu(\tilde{C}_x) = \nu(C_x)$, c.q.f.d.

Théorème 19. *Soient μ et ν des mesures σ-finies, C, un sous-ensembles $(\mu\times\nu)$-mesurable dans $X\times Y$. Posons $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\}$. Alors, pour μ-presque tous les $x \in X$, l'ensemble C_x est ν-mesurable, la fonction $f_C(x) = \nu(C_x)$ est μ-mesurable et*

$$(\mu\times\nu)(C) = \int_X f_C(x)\, d\mu(C), \tag{11}$$

égalité dans laquelle les deux membres peuvent simultanément prendre la valeur $+\infty$.

Démonstration. Si l'ensemble C admet une mesure finie, alors le théorème résulte du lemme précédent et du fait que l'égalité (11) est préservée par un passage à la limite (à gauche dans l'espace $L(X\times Y)$, à droite dans $L_1(X, \mu)$).

Si la mesure de l'ensemble C est infinie, il existe une famille croissante de sous-ensembles de mesure finie $C_n \subset C$ telle que $\bigcup C_n = C$ et $(\mu\times\nu)(C_n) \to \infty$. Alors $f_C(x) = \lim\limits_n f_{C_n}(x)$ et

$$\int\limits_X f_{C_n}(x)\, d\mu = (\mu\times\nu)(C_n) \to \infty.$$

Donc f_C est mesurable et non sommable, c.q.f.d.

Ce théorème justifie en particulier une méthode bien connue de calcul des surfaces de figures planes (resp. des volumes des corps) par intégration de la longueur (resp. des surfaces) de leurs sections.

Remarque 1. Les espaces (X, μ) et (Y, ν) figurant symétriquement dans le théorème 19, celui-ci reste vrai si on intervertit ces espaces. Donc

$$(\mu\times\nu)(C) = \int\limits_Y \mu(C'_y)\, d\nu(y), \tag{11'}$$

où $C'_y = \{x \in X:\ (x, y) \in C\}$. D'où

$$\int\limits_X \nu(C_x)\, d\mu(x) = \int\limits_Y \mu(C'_y)\, d\nu(y). \tag{12}$$

Remarque 2. Ce théorème est valable aussi pour le produit d'un nombre fini quelconque d'espaces. Dans le cas de trois espaces (X, μ), (Y, ν), (Z, λ) il devient

$$(\mu\times\nu\times\lambda)(C) = \int\limits_{X\times Y} \lambda(C_{x,y})\, d(\mu\times\nu)(x, y) = \int\limits_Z (\mu\times\nu)(C_z)\, d\lambda(z), \tag{13}$$

où

$$C_{x,y} = \{z \in Z:\ (x, y, z) \in C\},$$
$$C_z = \{(x, y) \in X\times Y:\ (x, y, z) \in C\}.$$

Théorème de Fubini. *Soit $f(x, y)$ une fonction sommable sur le produit des espaces (X, μ) et (Y, ν). On a alors les assertions suivantes :*

1) *Pour μ-presque tous les $x \in X$, la fonction $f(x, y)$ est sommable sur Y et son intégrale sur Y est une fonction sommable sur X ;*

2) *Pour ν-presque tous les $y \in Y$, la fonction $f(x, y)$ est sommable sur X et son intégrale sur X est une fonction sommable sur Y.*

3) *On a*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x, y)\, d(\mu\times\nu)(x, y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) =$$
$$= \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y). \tag{14}$$

4) *Pour les fonctions* $(\mu\times\nu)$*-mesurables non négatives, l'existence de l'une des intégrales itérées dans* (14) *entraîne la sommabilité de* f *sur* $X\times Y$.

Démonstration. La décomposition $f = f_+ - f_-$ ramène la démonstration au cas d'une fonction non négative. Considérons le produit des espaces (X, μ), (Y, ν), $(\mathbf{R}, \lambda)$, où $\lambda = dz$ est la mesure ordinaire de Lebesgue, et l'ensemble $C \subset X\times Y\times\mathbf{R}$ défini par

$$C = \{(x, y, z) \in X\times Y\times\mathbf{R}:\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}.$$

Appliquons la relation (13) à ce cas. On a

$$C_{x,y} = \{z \in \mathbf{R}:\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}\ ; \qquad \lambda(C_{x,y}) = f(x, y),$$
$$C_x = \{(y, z) \in Y\times\mathbf{R}:\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}\ ; \qquad (\nu\times\lambda)(C_x) = \int_Y f(x, y)\, d\nu(y),$$

d'où l'on déduit immédiatement toutes les propositions du théorème.

Signalons que la sommabilité de f dans 1), 2), 3) et la non-négativité dans 4) sont des conditions essentielles (comparer avec les exercices 239 à 242).

Définition. Soient donnés un ensemble X, une σ-algèbre $\mathfrak{A} \subset P(X)$, une mesure σ-finie μ et une charge finie ν sur $\mathfrak{A}$. On dit que la charge ν est *absolument continue* par rapport à μ si $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$. Deux charges ν_1 et ν_2 sont *équivalentes* si la condition $|\nu_1|(A) = 0$ et la condition $|\nu_2|(A) = 0$ sont équivalentes.

Théorème de Radon-Nikodym. *Toute charge finie* ν *absolument continue, par rapport à une mesure* μ *est de la forme*

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x), \tag{15}$$

où f *est une fonction de* $L_1(X, \mu)$. *La fonction* f *(comme élément de l'espace* $L_1(X, \mu)$*) est définie de façon unique par la charge* ν.

Démonstration. Pour tout nombre rationnel r posons $\nu_r = \nu - r\mu$. D'après l'exercice 136 on peut représenter l'ensemble X sous la forme $A_r^+ \sqcup A_r^-$ de sorte que la charge ν_r est non négative sur A_r^+ et non positive sur A_r^-. Pour tout nombre réel c posons $A_c = \bigcup_{r>c} A_r^+$. Il est évident que $\{A_c\}$ est une famille décroissante d'ensembles mesurables : $A_{c_1} \subset A_{c_2}$ pour $c_1 > c_2$. Montrons que $A_{-\infty} = \bigcap_c A_c$ et que le complémentaire de $A_\infty = \bigcup_c A_c$ sont de mesure nulle. En effet, si $A \subset A_{-\infty}$, alors $\nu_r(A) \geqslant 0$ pour tous les r, ce qui n'est possible que pour $\mu(A) = 0$. Si, par contre, $A \subset X\backslash A_\infty$, alors $\nu_r(A) \leqslant 0$ pour tous les r, ce qui n'est possible aussi que pour $\mu(A) = 0$. D'autre part, par construction la famille $\{A_c\}$ est continue à droite : $A_c = \bigcap_{\varepsilon>0} A_{c+\varepsilon}$. Il existe donc une fonction f sur X telle que $A_c = \{x \in X : f(x) > c\}$. La fonction f est mesurable puisque tous les ensembles A_c le sont par construction.

Supposons maintenant que E est un ensemble quelconque de mesure finie. Alors (voir exercice 187)

$$\int_E f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{k}{n}\,\mu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{k+1}{n}\,\mu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right).$$

Par ailleurs, par définition de A_c, on a

$$\frac{k}{n}\,\mu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right) \leqslant \nu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right) \leqslant \frac{k+1}{n}\,\mu\left(E \cap A_{\frac{k}{n}} \setminus A_{\frac{k+1}{n}}\right),$$

ce qui prouve (15) pour les ensembles de mesure finie. La finitude de la charge ν (cf. exercice 134) entraîne maintenant la sommabilité de f et la véracité de (15) dans le cas général. L'unicité de f (comme élément de $L_1(X, \mu)$) résulte de l'exercice 192, c.q.f.d.

Corollaire. Si μ est une mesure sur X et ν une charge finie absolument continue par rapport à μ, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$, tel que $\mu(A) < \delta$ entraîne $|\nu|(A) < \varepsilon$.

En effet, le théorème de Radon-Nikodym nous dit qu'il existe une fonction $f \in L_1(X, \mu)$ telle que $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$. Alors $|\nu|(A) = \int_A |f|\,d\mu$, et la proposition annoncée découle du théorème 18.

CHAPITRE 3

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES ET OPÉRATEURS LINÉAIRES

§ 1. Théorie générale

1. Topologie, convexité et semi-normes. Nous considérons des espaces vectoriels L sur les corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Si la proposition envisagée ne dépend pas du choix du corps, nous écrirons K au lieu de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Etant donnés deux sous-ensembles A et B de L et deux nombres λ et μ de K, on désignera par $\lambda A+\mu B$ l'ensemble des éléments $z \in L$ de la forme $\lambda x+\mu y$, où $x \in A$, $y \in B$.

Définitions. On appelle *segment* (resp. *intervalle*) de L d'extrémités x et y l'ensemble des points $z \in L$ de la forme $z = \tau x+(1-\tau)y$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ (resp. $0 < \tau < 1$).

On dit qu'un ensemble $E \subset L$ est *convexe* s'il contient deux quelconques de ses points avec l'intervalle qui les joint. Un ensemble $E \subset L$ est dit *équilibré* si $\alpha E \subset E$ pour tout $\alpha \in K$, $|\alpha| \leqslant 1$.

Un ensemble $E \subset L$ est dit *absorbant* si $\bigcup_{\lambda \in K} \lambda E = L$.

On appelle *semi-norme* une fonction p sur L à valeurs non négatives, (éventuellement $p(x) = \infty$) possédant les propriétés suivantes :

1) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$, $\lambda \in K$, $x \in L$ (homogénéité) ;

2) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ (sous-additivité).

La condition 1) implique que $p(0) = 0$.

On appelle *norme* une semi-norme prenant une valeur non nulle finie pour tout x non nul de L.

On appelle *boule unité* pour la semi-norme p l'ensemble $B_p = \{x \in L : p(x) \leqslant 1\}$.

On appelle *fonctionnelle de Minkowski* d'un ensemble $B \subset L$ la fonction $p_B(x) = \inf_{\lambda > 0,\, x \in \lambda B} \lambda$ (si $x \notin \lambda B$ pour aucun $\lambda > 0$, alors on convient que $p_B(x) = +\infty$).

Les correspondances $p \mapsto B_p$ et $B \mapsto p_B$ sont presque réciproques l'une de l'autre si p parcourt l'ensemble des semi-normes sur L et B est l'ensemble des ensembles équilibrés convexes. La réserve « presque » tient au fait que des ensembles B différents peuvent avoir la même fonctionnelle de Minkowski p_B (voir exercices 267, 268).

Théorème 1. 1) *Si p est une semi-norme, la boule unité B_p est un ensemble équilibré convexe.*

2) *Si p est une norme, alors B_p est un ensemble absorbant ne contenant aucune droite tout entière (c'est-à-dire un sous-espace de dimension* 1) *dans L.*

3) *Si B est un ensemble équilibré convexe, alors p_B est une semi-norme ;*

4) *Si B est un ensemble absorbant équilibré convexe ne contenant aucune droite, alors p_B est une norme.*

5) *Pour toute semi-norme p on a $p_{B_p} = p$.*

Démonstration. Les propositions 1) et 2) résultent immédiatement des définitions. Prouvons 3). L'homogénéité de la fonctionnelle p_B est évidente. Supposons que B est un ensemble convexe et prouvons que p_B est une fonction sous-additive. Soient $x, y \in L$. Si $p_B(x)$ ou $p_B(y)$ sont infinies, cela est évident. Si $p_B(x) = 0$, alors $\lambda x \in B$ pour tous les $\lambda > 0$. Donc, le fait que $y \in B$ entraîne que $(1-\varepsilon)y+x = (1-\varepsilon)y+\varepsilon\frac{x}{\varepsilon} \in B$ pour $\varepsilon \in]0, 1[$. Donc, l'inégalité $p_B(y) < 1$ implique que $p_B((1-\varepsilon)y+x) \leqslant 1$ pour tous les $\varepsilon \in]0, 1[$. D'où il résulte que $p_B(y+x) \leqslant p_B(y)$. Reste à étudier le cas où $p_B(x)$ et $p_B(y)$ sont différentes de zéro. Considérons les vecteurs $x_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon}{p_B(x)}x$ et $y_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon}{p_B(y)}y$. Par définition de la fonctionnelle de Minkowski on a $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in B$ pour $\varepsilon > 0$. Comme B est convexe il s'ensuit que $\tau x_\varepsilon+(1-\tau)y_\varepsilon \in B$ pour $\tau \in [0, 1]$. En particulier, pour $\tau = \frac{p_B(x)}{p_B(x)+p_B(y)}$ on obtient $\frac{1-\varepsilon}{p_B(x)+p_B(y)}(x+y) \in B$. Donc $p_B(x+y) \leqslant \frac{p_B(x)+p_B(y)}{1-\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$, d'où résulte la sous-additivité de p_B. Les propositions 4) et 5) se vérifient sans peine.

Définition. On appelle *espace vectoriel topologique* (en abrégé e.v.t.) un espace vectoriel L sur le corps K muni d'une topologie pour laquelle sont continus l'addition et le produit par un nombre.

Exemple 1. Soit p une semi-norme finie sur L ; prenons pour base de la topologie de L l'ensemble des boules ouvertes $\mathring{B}_p(x, r) = \{y \in L : p(x-y) < r\}$.

Vérifions qu'on obtient ainsi un espace vectoriel topologique. En effet, soient $x, y \in L$, U, un voisinage du point $x+y \in L$. Par définition de la topologie, l'ensemble U contient une boule de la forme $\mathring{B}_p(x+y, r)$, $r > 0$. Posons $U_1 = \mathring{B}_p(x, r/2)$, $U_2 = \mathring{B}_p(y, r/2)$. Alors, U_1 et U_2 sont ouverts et $U_1+U_2 \subset \mathring{B}_p(x+y, r) \subset U$ en vertu de la sous-additivité de p. Ce qui prouve que l'addition est continue.

Soient maintenant $x \in L$, $\lambda \in K$ et U un voisinage du point $\lambda x \in L$. Alors U contient la boule $\mathring{B}_p(\lambda x, r)$, $r > 0$. Posons $V_\varepsilon = \{\mu \in K: |\lambda-\mu| < \varepsilon\}$, $U_\delta = \mathring{B}_p(x, \delta)$. Si $\mu \in V_\varepsilon$, $y \in U_\delta$, alors,

$$p(\lambda x-\mu y) \leqslant p(\lambda x-\mu x)+p(\mu x-\mu y) \leqslant \varepsilon p(x)+(|\lambda|+\varepsilon)\delta.$$

Il est évident que cette expression est inférieure à r pour des ε et δ positifs assez petits. Donc $V_\varepsilon U_\delta \subset \mathring{B}_p(\lambda x, r) \subset U$, ce qui prouve que la multiplication est continue.

Exemple 2. Soit $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de semi-normes finies sur L. Prenons pour base de la topologie de L l'ensemble des boules $\mathring{B}_{p_\alpha}(x, r)$, $\alpha \in A$, $x \in L$, $r > 0$ et leurs intersections finies. Comme dans l'exemple 1 on vérifie que cette topologie fait de L un espace vectoriel topologique. De tels espaces sont appelés *polynormés.*

Remarque 1. Toute semi-norme finie sur l'espace L définit une application de L dans l'ensemble $\mathbf{R}^+$ composé de tous les nombres réels non négatifs. La topologie définie plus haut est la plus faible des topologies pour laquelle sont continues toutes les semi-normes de la famille $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Remarque 2. Dire que les semi-normes p sont continues, revient à dire que les boules $\mathring{B}_p(0, 1)$ sont ouvertes.

Définition. On appelle *espace* vectoriel topologique *localement convexe* (en abrégé e.l.c.) un e.v.t. muni d'une base d'ensembles convexes.

Il est évident que les e.v.t. des exemples 1 et 2 sont des e.l.c. L'e.v.t. de l'exemple 2 est le plus général de tous les e.l.c. Plus exactement on a le

Théorème 2. *Dans tout e.l.c. L on peut définir une topologie à l'aide d'une famille de semi-normes $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Pour une telle famille on peut prendre l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur L.*

La démonstration s'appuie sur la proposition suivante.

Lemme. *Tout voisinage de* 0 *dans un e.l.c. L contient un ensemble équilibré convexe ouvert.*

Démonstration du lemme. Soient U un voisinage quelconque de 0 et $\tilde{U} \subset U$ un voisinage convexe ouvert de 0 dans L. La continuité du produit par un nombre sur L entraîne l'existence d'un nombre $\varepsilon > 0$ et d'un voisinage ouvert $V \subset L$ de 0, tels que $B_\varepsilon \cdot V \subset \tilde{U}$, où $B_\varepsilon = \{\lambda \in K : |\lambda| < \varepsilon\}$. Supposons que W désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble $B_\varepsilon V$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $\sum_{k=1}^{N} \tau_k x_k$, où $x_k \in B_\varepsilon V$, et que les coefficients τ_k sont tels que

$$0 \leqslant \tau_k \leqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{N} \tau_k = 1$$

(comparer avec l'exercice 269). Alors l'ensemble W est ouvert, convexe, équilibré et contenu dans $\tilde{U} \subset U$, ce qui prouve le lemme.

Démonstration du théorème 2. D'après le lemme et la proposition 3) du théorème 1, sur L est définie une famille non vide de semi-normes continues possédant la propriété décrite dans l'exemple 2. Munissons L d'une topologie d'espace semi-normé en prenant pour $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la famille de toutes les semi-normes continues sur L. Il est évident que cette topologie n'est pas plus forte que la topologie initiale, puisque toutes les boules $\mathring{B}_{p_\alpha}(x, r)$ sont ouvertes pour la topologie initiale. D'autre part dans chaque voisinage de 0 pour la topologie initiale, on peut inscrire un ensemble ouvert équilibré

convexe W, donc la boule $\mathring{B}_{p_W}(0, 1)$. Par suite, la topologie de l'espace semi-normé n'est pas plus faible que la topologie initiale, c.q.f.d.

En général, on n'étudie que les e.v.t. *séparés* (ou *de Hausdorff*), c'est-à-dire des espaces tels que deux points quelconques possèdent des voisinages disjoints.

Théorème 3. *Dans tout e.v.t. L il existe un sous-espace L_0 unique tel que*

1) *tout voisinage non vide d'un point $x \in L$ contient l'ensemble $x + L_0$;*

2) *l'espace quotient L/L_0 muni de la topologie quotient naturelle est séparé.*

Démonstration. Soit L_0 l'intersection de tous les voisinages non vides de 0. La continuité de l'addition et du produit par un nombre entraîne que L_0 est un sous-espace et que 1) est vraie. Si, d'autre part, x et y sont deux points quelconques de l'espace quotient L/L_0, il existe un voisinage U de 0 dans L/L_0 ne contenant pas $x-y$. De la continuité de la soustraction il résulte qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $V-V \subset U$. Donc $x+V$ et $y+V$ sont des voisinages disjoints de x et y, c.q.f.d.

Exemple. Dans l'espace semi-normé $(L, \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$ L_0 est confondu avec l'ensemble sur lequel les semi-normes p_α s'annulent.

Une même topologie sur un e.l.c. L peut être définie par des familles différentes de semi-normes. Deux familles de semi-normes $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et $\{q_\beta\}_{\beta \in B}$ sont *équivalentes* si elles définissent la même topologie. On démontre que deux familles de semi-normes sont équivalentes si et seulement si toute semi-norme d'une famille est majorée par une combinaison linéaire finie de semi-normes de l'autre famille et inversement.

Dans la suite on n'étudiera en principe que des espaces semi-normés séparés. Les plus importants d'entre eux sont ceux qui mettent en jeu une famille A finie ou dénombrable. Si A est finie, on peut remplacer la famille de semi-normes $\{p_\alpha\}$ par une seule semi-norme $p = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha$ qui définit la même topologie que cette famille. Pour que L soit séparé, il est nécessaire et suffisant que la semi-norme p soit une norme. Les e.v.t. dont la topologie peut être définie par une norme sont dits *normables*. Si la norme p définissant la topologie est fixée, ils sont dits *normés*. Si A est dénombrable, L n'est généralement pas normable. Cependant, tout e.v.t. dénombrablement normé est *métrisable*, c'est-à-dire sa topologie est définie par une métrique. De plus, cette métrique peut être considérée comme étant invariante par les translations*). Une telle métrique est la fonction

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

2. Espaces duals. Les espaces vectoriels topologiques forment une catégorie dont les morphismes sont les applications linéaires continues.

*) En général, on appelle espace vectoriel métrique un espace vectoriel muni d'une métrique invariante par les translations. Nous suivrons cette terminologie.

On désigne par $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ l'ensemble de toutes les applications continues linéaires d'un e.v.t. L_1 dans un e.v.t. L_2. Il est évident que $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ est un espace vectoriel sur K. Le cas $L_2 = K$ présente un intérêt particulier.

Soit donné un e.v.t. L. L'espace $\mathcal{L}(L, K)$ désigné généralement par L' s'appelle *espace dual* de L et ses éléments, *fonctionnelles continues linéaires* sur L.

Si L est un espace normé, alors on peut aussi munir L' d'une norme par la formule

$$\|f\|_{L'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_L} \tag{1}$$

(voir exercice 282), où $\|x\|_L$ désigne la norme de $x \in L$.

De façon analogue, si L est un espace polynormé muni d'une famille de semi-normes $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$, alors on peut munir L' de la famille de semi-normes $\{p'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (généralement non finie)

$$p'_\alpha(f) = \sup_{\{x\,:\, p_\alpha(x) \neq 0\}} \frac{|f(x)|}{p_\alpha(x)}\,. \tag{2}$$

L'espace L' muni de la topologie définie par la norme (1) est appelé *fortement dual* de L.

On définit la *topologie faible* sur tout e.v.t. L par une famille de semi-normes $p_f(x) = |f(x)|$, où f parcourt L' ; pour désigner la convergence faible des suites on se sert du symbole $x_n \rightharpoonup x$.

La *topologie* $*$*-faible* est définie pour l'espace L' par la famille de semi-normes $p_x(f) = |f(x)|$, où x parcourt L.

On appelle *espace de Banach* un espace normé complet.

Théorème 4. *Le dual* (L', p') *de tout espace normé* (L, p) *est complet**).

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite fondamentale d'éléments de L'. Pour chaque $x \in L$ la suite numérique $f_n(x)$ est fondamentale et par suite admet une limite que nous désignons par $f(x)$. Vérifions que $f \in L'$. La linéarité de f s'obtient par un passage à la limite à partir de la linéarité de f_n. Dire que f est continue revient à dire qu'elle est bornée sur la boule unité B_p (voir exercice 281) ; or, ceci résulte du fait que $\{f_n\}$ est fondamentale et de la majoration

$$|f(x)| \leqslant p'(f)\,p(x). \tag{3}$$

Enfin, l'assertion $p'(f_n - f) \to 0$ s'obtient par passage à la limite pour $m \to \infty$ dans l'inégalité $p'(f_n - f_m) < \varepsilon$, valable pour les n, m assez grands, puisque $\{f_n\}$ est fondamentale, c.q.f.d.

Tout espace normé L peut être naturellement plongé dans l'espace bidual L'' (voir exercice 303). Si cette injection est un isomorphisme sur L'' tout entier, l'espace L est dit *réflexif*. Les topologies faible et $*$-faible de tels espaces sont confondues.

---

*) Ici et dans la suite on entendra par espace dual un espace fortement dual si le contraire n'est pas spécifié.

La correspondance $L \to L'$ est prolongeable en un foncteur contravariant dans la catégorie $\mathcal{B}$ de tous les espaces de Banach (les morphismes sont les opérateurs linéaires continus). Plus précisément, à tout opérateur $A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ on peut associer un *opérateur adjoint* A' agissant de L_2' dans L_1' par la formule

$$A'f(x) = f(Ax), \quad \text{où} \quad f \in L_2', \quad x \in L_1.$$

On appelle *norme de l'opérateur* $A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ le nombre $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}}$.

Théorème 5. *La norme de l'opérateur A' est confondue avec celle de A.*

Démonstration. Calculons la norme de A'. Par définition

$$\|A'\| = \sup \frac{\|A'f\|}{\|f\|} = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A'f\| = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ \|x\| \leq 1}} |(A'f)(x)| =$$

$$= \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ \|x\| \leq 1}} |f(Ax)| = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ \|x\| \leq 1}} |F_{Ax}(f)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|F_{Ax}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|.$$

(Nous avons utilisé l'égalité $\|F_{Ax}\| = \|Ax\|$, où $F_y \in (L_2')'$ est l'image de $y \in L_2$ par l'injection naturelle $L \to (L')'$, qui est équivalente à l'assertion de l'exercice 303.)

3. Théorème de Hahn-Banach. Si L_1 et L_2 sont des e.v.t. séparés et de dimension finie, alors toute application linéaire de L_1 dans L_2 est continue (voir exercice 300) et, par suite, $\dim \mathcal{L}(L_1, L_2) = \dim L_1 \cdot \dim L_2$. En particulier, $\dim L' = \dim L$. Ceci est mis en défaut si la dimension est infinie. On sait (voir exercice 321) qu'il existe des e.v.t. séparés L de dimension infinie tels que $L' = \{0\}$. Cet inconvénient n'existe pas dans les e.l.c.

Théorème de Hahn-Banach. *Soient p une semi-norme sur L, L_0 une partie de L et f_0 une fonctionnelle linéaire sur L_0 telle que $|f_0(x_0)| \leq p(x_0)$ pour tous les $x_0 \in L_0$. Il existe alors une fonctionnelle linéaire f sur L confondue avec f_0 sur L_0 et telle que $|f(x)| \leq p(x)$ pour tous les $x \in L$.*

Démonstration. Considérons la famille $\mathcal{L}$ de tous les couples (L_1, f_1), où L_1 est un sous-espace de L contenant L_0 et f_1, une fonctionnelle linéaire sur L_1 confondue avec f_0 sur L_0 et telle que $|f_1(x_1)| \leq p(x_1)$, $x_1 \in L_1$. Signalons que $\mathcal{L}$ n'est pas vide, puisqu'il contient le couple (L_0, f_0). Définissons sur l'ensemble $\mathcal{L}$ un ordre partiel en posant $(L_1, f_1) < (L_2, f_2)$ si $L_1 \subset L_2$ et si la restriction de f_2 à L_1 est confondue avec f_1. L'ensemble $\mathcal{L}$ satisfait aux conditions du lemme de Zorn : tout sous-ensemble $\{(L_\alpha, f_\alpha)\}$, $\alpha \in A$ de $\mathcal{L}$ admet un majorant : $\left(\bigcup L_\alpha, f\right)$, $\alpha \in A$, où f est une fonctionnelle confondue avec f_α sur L_α. Donc $\mathcal{L}$ admet un élément maximal $(\tilde{L}, \tilde{f})$.

Supposons que $\tilde{L} \neq L$. Soit $x \in L$ un élément non contenu dans $\tilde{L}$. Construisons le prolongement $\tilde{f}_1$ de la fonctionnelle $\tilde{f}$ à l'espace $\tilde{L}_1 = \tilde{L} + Kx$ en posant $\tilde{f}_1(\tilde{x} + \lambda x) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \lambda c$. Ecrivons les conditions que doit remplir la constante $c \in K$ pour que ce prolongement possède la propriété : $|\tilde{f}_1(x)| \leq$

$\leqslant p(x)$, $x \in \tilde{L}_1$:

$$|f(\tilde{x})+\lambda c| \leqslant p(\tilde{x}+\lambda x), \quad \tilde{x} \in \tilde{L}, \quad \lambda \in K.$$

En substituant $-\lambda y$ à $\tilde{x}$ et en divisant les deux membres de cette inégalité par $|\lambda|$, on obtient la condition équivalente

$$|c-f(y)| \leqslant p(x-y), \quad y \in \tilde{L}.$$

Traitons d'abord le cas $K = \mathbf{R}$. Il nous faut vérifier que la famille d'intervalles $[f(y)-p(x-y), f(y)+p(x-y)]$, $y \in \tilde{L}$ possèdent un point commun. Pour cela il suffit de vérifier que l'extrémité gauche de tout intervalle est située à gauche de l'extrémité droite de tout autre intervalle. Le point cherché sera alors la borne supérieure de toutes les extrémités gauches.

Il reste donc à vérifier l'inégalité

$$f(y_1)-p(x-y_1) \leqslant f(y_2)+p(x-y_2), \quad y_1, y_2 \in \tilde{L}.$$

Or, elle découle immédiatement de

$$f(y_1)-f(y_2) \leqslant p(y_1-y_2) \leqslant p(y_1-x)+p(x-y_2).$$

Le *théorème de Helly* (voir exercice 320) nous permet d'étendre immédiatement ce raisonnement au cas complexe. Nous indiquons ici une voie plus simple. Traitons l'espace $\tilde{L}_1$ comme un espace réel. On peut alors l'obtenir à partir de $\tilde{L}$ en lui ajoutant successivement $\mathbf{R}\cdot x$ et $\mathbf{R}\cdot ix$. Les prolongements successifs de la fonctionnelle $\tilde{f}$ nous conduisent à une fonctionnelle linéaire réelle φ, confondue avec $\tilde{f}$ sur $\tilde{L}$ et telle que $|\varphi(x)| \leqslant p(x)$ pour $x \in \tilde{L}_1$. Il est évident que la fonctionnelle $\psi(x) = -i\varphi(ix)$ possède les mêmes propriétés. Enfin, en posant $\tilde{f}_1(x) = \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}$, on obtient le prolongement cherché $|\tilde{f}_1(x)| = \frac{|\varphi(x)|+|\psi(x)|}{2} \leqslant p(x)$ et $\tilde{f}_1(ix) = \frac{\varphi(ix)-i\varphi(-x)}{2} = i\tilde{f}_1(x)$. Nous avons ainsi construit le couple $(\tilde{L}_1, \tilde{f}_1)$ qui suit $(\tilde{L}, \tilde{f})$, ce qui contredit le fait que $(\tilde{L}, \tilde{f})$ est maximal. Donc la proposition $\tilde{L} \neq L$ est fausse, c.q.f.d.

Corollaire 1. *Dans tout espace semi-normé L il existe suffisamment de fonctionnelles continues linéaires pour séparer deux points quelconques.*

En effet, si $x, y \in L$, $x \neq y$, alors le lemme du numéro 1 nous dit qu'il existe un voisinage équilibré convexe de 0 ne contenant pas $x-y$. Posons $p = p_U$, $L_0 = K(x-y)$, $f_0(x-y) = 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach il existe une fonctionnelle $f \in L'$ telle que $f(x)-f(y) = 1$ et $|f(x)| \leqslant p_U(x)$.

Corollaire 2. *Pour tout espace normé (L, p) et tout vecteur $x \in L$, $x \neq 0$, il existe une fonctionnelle $f \in (L', p')$ non nulle telle que*

$$f(x) = p'(f)\,p(x). \tag{3'}$$

Corollaire 3. *Pour tout espace normé (L, p) l'injection naturelle de L dans L'' (qui transforme $x \in L$ en la fonctionnelle $x(f) = f(x)$) est isométrique.* (Comparer avec les exercices 303, 304.)

Remarque. Les propriétés de la semi-norme p n'ont pas été entièrement utilisées dans la démonstration du théorème de Hahn-Banach. Plus préci-

sément on peut prouver que tous les raisonnements restent en vigueur si l'on exige que p soit sous-additive et positivement homogène : $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour $\lambda \geqslant 0$.

De plus, on peut affaiblir les conditions du théorème en exigeant la réalisation de l'inégalité $f_0(x) \leqslant p(x)$ (c'est-à-dire que la fonctionnelle ne soit bornée que supérieurement) ; ceci étant, la fonctionnelle $f(x)$ est justiciable de la majoration $f(x) \leqslant p(x)$.

Voici l'interprétation géométrique du théorème de Hahn-Banach.

Définition. Soient L et M des espaces vectoriels. On appelle *variété linéaire* dans l'espace vectoriel L l'image réciproque d'un point par une application linéaire $A : L \to M$. Si l'image de L dans M par l'application A est de dimension n, on dit que la variété linéaire $A^{-1}(x)$, $x \in A(L)$, est de *codimension n*. Une variété de codimension 1 s'appelle *hyperplan*. Donc, les hyperplans sont les ensembles de niveau des fonctionnelles linéaires.

Théorème 6. (Forme géométrique du théorème de Hahn-Banach). *Supposons que $K = \mathbf{R}$. Si U est un ensemble convexe ouvert dans un e.v.t. L et S est une variété linéaire ne rencontrant pas U, alors il existe un hyperplan T contenant S et ne rencontrant pas U.*

Démonstration. On admettra que U contient 0. Soit L_0 le sous-espace engendré par S et f_0, une fonctionnelle linéaire sur L_0, définie par $f_0(x) = 1$ pour $x \in S$ (la fonctionnelle f_0 est correctement définie puisque S engendre L_0 et ne contient pas 0). Comme S ne rencontre pas U, la fonctionnelle f_0 est telle que $f_0(x) \leqslant p_U(x)$ pour $x \in L_0$. La fonctionnelle de Minkowski p_U est sous-additive et positivement homogène : $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$ pour $\lambda > 0$. D'après la remarque faite plus haut ces propriétés suffisent pour prouver le théorème de Hahn-Banach dans le cas réel. Prolongeons f_0 en une fonctionnelle f sur l'espace tout entier, telle que $f(x) \leqslant p_U(x)$ et posons $T = \{x \in L, f(x) = 1\}$. Alors T est l'hyperplan cherché. En effet, $f(x) \leqslant 1$ sur U et $f(x) < 1$ pour $x \in U$, puisque U est ouvert.

Corollaire. Soient donnés deux ensembles disjoints convexes U_1 et U_2 dans un e.v.t., l'un étant ouvert. Il existe alors un hyperplan T séparant U_1 et U_2.

En effet, posons $U = U_1 - U_2$, $S = \{0\}$. Alors U est un ensemble ouvert convexe, S, une variété linéaire ne rencontrant pas U. Soit T_0 un hyperplan contenant S et ne rencontrant pas U. Comme T_0 contient 0, il est défini par une équation $f(x) = 0$, où f est une fonctionnelle linéaire sur L. L'ensemble U étant convexe et ne rencontrant pas T, la fonctionnelle f prend des valeurs de même signe sur U.

Supposons, pour fixer les idées, que $f(x) > 0$ pour $x \in U$. En se rappelant de la définition de U, on remarque que $f(x_1) > f(x_2)$ pour tous les $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Soit $c = \sup\limits_{x_2 \in U_2} f(x_2)$. Alors l'hyperplan $T = \{x : f(x) = c\}$ sépare U_1 et U_2.

Remarque. Il est essentiel d'exiger que U_1 ou U_2 soient ouverts dans l'énoncé du corollaire (voir exercice 301). Un autre théorème de séparation d'ensembles convexes est accessible dans l'exercice 302.

4. Espaces de Banach. Les e.v.t. les plus commodes à l'usage et par conséquent les plus fréquents (surtout dans les problèmes d'application) sont les espaces de Banach. Ces espaces sont justiciables de trois principes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle linéaire, principes dont l'un (le théorème de Hahn-Banach) a été mentionné plus haut. Ces espaces donnent lieu aux théorèmes des fonctions implicites et inverses qui servent de base à de nombreux résultats de l'analyse fonctionnelle non linéaire. Nous exhibons ici quelques propriétés élémentaires et constructions d'espaces de Banach. On trouvera de plus amples détails dans [20], [29] et [15].

Nous commençons par les espaces de dimension finie. L'exemple le plus connu d'espace de Banach est l'espace $l_2(n, K)$, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Il est composé de tous les vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, et la norme y est définie par la formule

$$||x|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{n} |x_n|^2}. \tag{4}$$

Une extension naturelle de cet espace est l'espace $l_p(n, K)$ qui est constitué aussi des vecteurs $x \in K^n$, mais sur lequel la norme est définie par

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Il est aisé de prouver par un passage à la limite pour $p \to \infty$ dans (5) que

$$||x||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|. \tag{5'}$$

L'expression du second membre de (5) est une norme lorsque p appartient à l'intervalle $[1, \infty]$ (voir exercice 323). La démonstration de cette assertion n'est pas évidente et se fait en plusieurs étapes.

On dira que deux nombres p et q de $[1, \infty]$ sont *conjugués* si est réalisée l'une des conditions équivalentes suivantes :

1) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$;

2) $(p-1)(q-1) = 1$;

3) $p+q = pq$.

Lemme (inégalité de Hölder). *Soient p et q des nombres conjugués de $[1, \infty]$. Alors pour tous $x, y \in K^n$, on a*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant ||x||_p \, ||y||_q. \tag{6}$$

Démonstration. Si l'un des nombres p ou q est égal à ∞, l'inégalité (6) est évidente. Traitons le cas où p et q sont finis. On se servira du résultat auxiliaire suivant : si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ et si p et q sont des nombres conjugués, alors $ab \leqslant a^p/p+b^q/q$. Analytiquement on met en évidence cette inégalité par un calcul immédiat des dérivées partielles de la fonction

$\varphi(x, y) = xy - x^p/p - y^q/q$. La figure 1 nous donne la signification géométrique de cette inégalité. On voit sur cette figure que cette inégalité se transforme en égalité pour $a = b^{q-1}$ (ou $b = a^{p-1}$).

Prouvons maintenant l'inégalité de Hölder. Les deux membres de l'inégalité (6) étant homogènes en x et y, il suffit de considérer le cas $\|x\|_p = 1 = \|y\|_q$. (Cette inégalité est évidente si l'un des vecteurs x ou y est

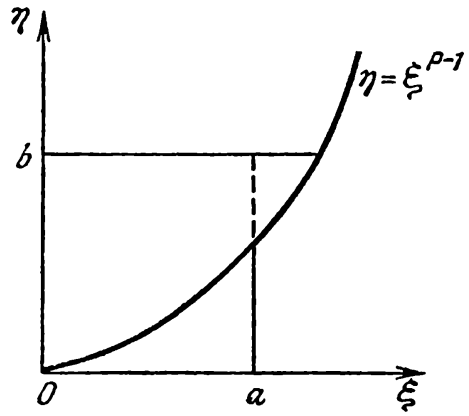


Fig. 1

nul). Posons $a = |x_i|$, $b = |y_i|$ dans l'inégalité auxiliaire. On obtient $|x_i y_i| \leqslant |x_i|^p/p + |y_i|^q/q$. En sommant sur i de 1 à n, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{\|x\|_p^p}{p} + \frac{\|y\|_q^q}{q} = 1,$$

c.q.f.d.

Remarque. La démonstration du lemme fait apparaître la proposition utile subsidiaire suivante à l'inégalité de Hölder : pour tout $x \in K^n$ non nul il existe un $y \in K^n$ non nul pour lequel l'inégalité de Hölder se transforme en égalité.

D'où l'on déduit la formule

$$\|x\|_p = \max_{\|y\|_q \leqslant 1} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|. \tag{7}$$

En effet, le second membre de (7) n'est pas supérieur au premier membre d'après l'inégalité de Hölder et atteint cette valeur d'après la remarque faite plus haut.

Soit X un espace topologique compact. Désignons par $C(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur X. Il est immédiat de voir que cet espace est normé si l'on pose

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in C(X).$$

Théorème 7. *Soient p et q deux nombres conjugués. L'expression $\|x\|_p$ est une norme pour $p \in [1, \infty]$. L'espace $l_p(n, K)'$ est isomorphe à $l_q(n, K)$.*

Démonstration. Soit Y_q un compact dans K^n défini par $Y_q = \{y \in K^n, \|y\|_q \leqslant 1\}$. Construisons une application de K^n dans $C(Y_q)$ à l'aide de la formule $x \mapsto f_x$, où $f_x(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. De (7) il résulte que $\|x\|_p = \|f_x\|_{C(Y_q)}$. Or $C(Y_q)$ est un espace normé, donc $\|x\|_p$ est une norme sur K^n. La deuxième proposition du théorème découle immédiatement de (7) et de la définition de la norme sur l'espace dual, c.q.f.d.

L'espace $l_p(n, K)$ admet une extension. Désignons par $l_p(K)$ l'espace des suites dans K telles que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. (Pour $p = \infty$ on désignera par $l_\infty(K)$ l'espace des suites bornées dans K.) Posons

$$\|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_n |x_n| \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

On montre (voir exercices 324, 325) que les espaces $l_p(K)$ sont des espaces de Banach pour tout $p \in [1, \infty]$.

Citons maintenant quelques méthodes de construction d'espaces de Banach à partir d'espaces donnés.

1. La complétion de tout espace normé est un espace de Banach.

2. Si L est un espace de Banach, toute partie fermée L_0 de L est un espace de Banach.

3. Si L_0 est une partie fermée d'un espace de Banach L, $L_1 = L/L_0$ l'espace quotient correspondant, alors L_1 est un espace de Banach pour la norme $\|x\|_{L_1} = \inf_{y \in x} \|y\|_L$. (Voir exercices 327, 328.)

4. Soient L_1 et L_2 des espaces de Banach, $L_1 \otimes L_2$, leur *produit tensoriel* algébrique. (Rappelons la définition de $L_1 \otimes L_2$ (voir aussi l'exercice 61).) Soient $L_1 \square L_2$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires formelles des symboles $x \square y$, où $x \in L_1$, $y \in L_2$; $L_1 \circ L_2$, la partie de $L_1 \square L_2$ engendrée par les expressions de la forme

a) $(x_1 + x_2) \square y - x_1 \square y - x_2 \square y$,

b) $x \square (y_1 + y_2) - x \square y_1 - x \square y_2$,

c) $\lambda x \square \mu y - \lambda\mu(x \square y)$; $\lambda, \mu \in K$.

Alors $L_1 \otimes L_2 = (L_1 \square L_2)/(L_1 \circ L_2)$. Si $x \in L_1$, $y \in L_2$, alors on désigne par $x \otimes y$ la classe d'équivalence contenant $x \square y$.

Remarque. Il ne faut pas croire que tout élément de l'espace $L_1 \otimes L_2$ est de la forme $x \otimes y$ (voir, par exemple, exercice 341).

Si L_1 est de dimension finie et possède une base $e_1, \ldots, e_n$, alors on vérifie immédiatement que tout élément $a \in L_1 \otimes L_2$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{k=1}^{\infty} e_k \otimes y_k$. Si de même L_2 est de dimension finie et admet une base $f_1, \ldots, f_m$, alors les éléments $e_i \otimes f_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, forment

une base sur $L_1 \otimes L_2$. On peut munir $L_1 \otimes L_2$ d'une norme de plusieurs manières. Ceci étant, il est naturel d'exiger que cette norme p jouisse de la propriété : $p(x \otimes y) = p_1(x) p_2(y)$, où $x \in L_1$, $y \in L_2$, et p_1 et p_2 sont des normes sur les espaces L_1 et L_2 respectivement. Ces normes sont dites *normes tensorielles croisées.*

On remarquera maintenant que l'espace $L_1' \otimes L_2'$ s'applique naturellement dans $(L_1 \otimes L_2)'$: à l'élément $f_1 \otimes f_2 \in L_1' \otimes L_2'$ est associée la fonctionnelle linéaire f sur $L_1 \otimes L_2$ définie par $f(x \otimes y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. On exigera que la norme p sur $L_1 \otimes L_2$ soit telle que $p'(f) = p_1'(f_1) p_2'(f_2)$, où p', p_1', p_2', sont des normes sur les espaces $(L_1 \otimes L_2)'$, L_1', L_2', respectivement. Ces normes sont dites *tensorielles croisées uniformes.* Il se trouve (voir exercice 339) que parmi les normes tensorielles croisées il en existe une plus grande, notée $p_1 \hat{\otimes} p_2$, et parmi les uniformes, une plus petite, notée $p_1 \underset{\vee}{\otimes} p_2$. Les complétions de $L_1 \otimes L_2$ pour ces normes sont respectivement désignées par $L_1 \hat{\otimes} L_2$ et $L_1 \underset{\vee}{\otimes} L_2$.

5. Si L_1 et L_2 sont des espaces de Banach on peut définir sur leur somme directe $L_1 \oplus L_2$ une norme par

$$||x_1 \oplus x_2|| = ||x_1||_1 + ||x_2||_2.$$

L'espace obtenu sera aussi un espace de Banach. Signalons qu'on peut obtenir un espace topologiquement équivalent (mais non isomorphe) en posant

$$||x_1 \oplus x_2|| = \sup(||x_1||_1, ||x_2||_2).$$

§ 2. Opérateurs linéaires

1. Espace des opérateurs linéaires. Les espaces vectoriels topologiques sur un corps donné K ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) forment une catégorie $\mathcal{L}_K$ dont les morphismes sont les applications linéaires continues appelées généralement *opérateurs linéaires continus.* Si L_1 et L_2 sont des e.v.t. sur K, alors l'ensembl) des opérateurs linéaires continus de L_1 dans L_2 est désigné par $\mathcal{L}(L_1, L_2$ (voir chapitre, 3, § 1, n° 2). Il est évident que $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ est un espace vectoriel sur K ; si $L_1 = L_2 = L$, alors $\mathcal{L}(L_1, L_2)$, désigné souvent par End L, est en outre une algèbre sur K.

L'espace $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ peut être muni de plusieurs topologies. Les plus courantes sont les trois suivantes.

1. *Topologie faible.* Les ensembles

$$U(x, f) = \{A \in \mathcal{L}(L_1, L_2 : |f(A(x))| < 1\}, \quad x \in L_1, \quad f \in L_2'$$

forment une base de voisinages de 0*) pour cette topologie.

Il est immédiat de vérifier qu'une suite $\{A_n\}$ converge vers A pour la topologie faible si et seulement si pour tout $x \in L_1$ la suite $\{A_n(x)\}$ converge

*) Pour définir une topologie sur un e.v.t. il suffit de se donner une base de voisinages de 0. Pour un tel système on peut prendre une famille quelconque de parties contenant 0, dont les translations forment une base pour cette topologie.

vers $A(x)$ pour la topologie faible de l'espace L_2. Cette relation se note : $A_n \rightharpoonup A$ ou $A = w\text{-}\lim A_n$.

2. *Topologie forte.* Une base de voisinages de 0 est constituée des ensembles $U(x, V) = \{A \in \mathcal{L}(L_1, L_2) : Ax \in V\}$, où $x \in L_1$ et V est un voisinage de 0 dans L_2. Il est évident que la convergence forte de A_n vers A équivaut à la convergence de $A_n x$ vers Ax pour la topologie de L_2 pour tout $x \in L_1$. Ce qu'on écrit : $A_n \to A$ ou $A = s\text{-}\lim A_n$.

3. *Topologie uniforme.* Soient L_1 et L_2 des espaces normés de normes p_1 et p_2. On peut alors munir l'espace $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ d'une norme p définie par

$$p(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{p_2(Ax)}{p_1(x)}.$$

Une base de voisinages de 0 est formée par les ensembles

$$U(\varepsilon) = \{A \in \mathcal{L}(L_1, L_2) : p(A) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

La convergence de la suite A_n vers A pour la topologie uniforme, (c'est-à-dire $p(A_n - A) \to 0$ pour $n \to \infty$) est notée : $A_n \Rightarrow A$ ou $A = u\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

Un raisonnement peu compliqué montre que la topologie faible est plus faible que la forte et la forte plus faible que l'uniforme. Signalons que dans le cas fini, i.e. $\dim L_1 < \infty$ et $\dim L_2 < \infty$, ces trois topologies sont confondues. Dans le cas infini, il en va autrement (comparer avec les exercices 346, 347, 348).

Signalons une certaine incompatibilité dans la terminologie décrite (et en usage) avec les notions introduites précédemment (qui sont aussi en usage) de topologies faible et forte sur l'espace $L' = \mathcal{L}(L, K)$. De façon plus précise, si l'on traite les fonctionnelles linéaires $f \in L'$ comme des opérateurs de L dans K, alors les topologies opératorielles faible et forte sont associées à la topologie $*$-faible de L', et la topologie opératorielle uniforme, à la topologie forte de L'.

L'analyse fonctionnelle linéaire repose sur trois piliers, trois théorèmes rattachés au nom de Stephan Banach. L'un d'eux, le théorème de Hahn-Banach est traité au § 1. Nous nous proposons de citer les deux autres.

Théorème de Banach-Steinhaus. *Soient L_1 un espace vectoriel métrique complet, L_2, un espace normé et $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de L_1 dans L_2. Si pour tout $x \in L_1$, l'ensemble $\{A_\gamma x\}_{\gamma \in \Gamma}$ est borné dans L_2 (c'est-à-dire $\|A_\gamma x\| \leqslant C(x)$, $\forall x \in L_1$, $\gamma \in \Gamma$), alors la famille $\{A_\gamma\}$ est uniformément bornée sur une boule centrée en 0 dans L_1 (c'est-à-dire $\|A_\gamma x\| \leqslant C$ pour tous les $\gamma \in \Gamma$ et tous les x de la boule $B(0, r) = \{x \in L_1 : d(0, x) \leqslant r\}$).*

Corollaire. Dans les conditions du théorème, la famille $\{A_\gamma\}$ est équicontinue : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \|A_\gamma(x_1) - A_\gamma(x_2)\| < \varepsilon$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Démonstration du corollaire. Supposons que $\|A_\gamma x\| \leqslant c$ sur la boule $B(0, r)$. Choisissons δ assez petit pour que la boule $B(0, \delta)$ soit contenue

dans l'ensemble $\frac{\varepsilon}{c}B(0, r)$. (Ceci est possible en vertu de la continuité du produit par un nombre sur L_1.) Alors, si $d(x_1, x_2) < \delta$, $||A_\gamma(x_1)-A_\gamma(x_2)|| = = ||A_\gamma(x_1-x_2)|| = \frac{\varepsilon}{c}\left\| A_\gamma \cdot \frac{c(x_1-x_2)}{\varepsilon}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{c}\cdot c = \varepsilon$, puisque

$$\frac{c(x_1-x_2)}{\varepsilon} \in \frac{c}{\varepsilon}B(0, \delta) \subset B(0, r).$$

Démonstration du théorème de Banach-Steinhaus. Supposons que la famille $\{A_\gamma\}$ n'est bornée pour aucune boule de la forme $B(0, r)$, $r > 0$. Alors elle n'est bornée pour aucune boule. Soit en effet $B(x_1, r_1)$ une boule quelconque de L_1. L'invariance de la métrique par les translations entraîne que la boule $B(x_1, r_1) = x_1+B(0, r_1)$. La famille $\{A_\gamma\}$ étant bornée sur le vecteur x_1 et non bornée sur la boule $B(0, r_1)$, elle n'est pas bornée sur la boule $B(x_1, r_1)$.

Construisons maintenant une suite de boules $B(x_n, r_n)$ et une suite d'indices $\{\gamma_n\}$ possédant les propriétés suivantes :

1) $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n)$;

2) $r_{n+1} \leqslant r_n/2$;

3) $||A_{\gamma_n}(x)|| \geqslant n \ \forall x \in B(x_n, r_n)$.

Posons $x_0 = 0$, $r_0 = 1$ et utilisons le fait que la famille $\{A_\gamma\}$ est indéfinie sur la boule $B(x_0, r_0)$. Cela signifie qu'il existe un indice γ_1 et un élément $x_1 \in B(x_0, r_0)$, tels que $||A_{\gamma_1}x_1|| > 1$. La continuité de A_{γ_1} entraîne l'existence d'un nombre r_1 tel que $||A_{\gamma_1}x|| \geqslant 1$ pour tous les $x \in B(x_1, r_1)$. Quitte à réduire r_1 on peut admettre que $r_1 < r_0/2$ et $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$. Supposons qu'on ait déjà choisi les boules $B(x_k, r_k)$ et les indices γ_k pour $k \leqslant n-1$. La famille $\{A_\gamma\}$ étant indéfinie pour $B(x_{n-1}, r_{n-1})$, il existe un indice γ_n et un élément $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1})$, tels que $||A_{\gamma_n}(x_n)|| > n$. La continuité de A_{γ_n} entraîne l'existence d'un nombre r_n tel que $||A_{\gamma_n}x|| \geqslant n$ pour tous les $x \in B(x_n, r_n)$. En réduisant au besoin r_n on peut faire en sorte que $r_n < r_{n-1}/2$ et $B(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$.

Utilisons maintenant la complétude de L_1. Soit x un point commun à toutes les boules $B(x_n, r_n)$. Un tel point existe d'après le théorème des boules emboîtées (voir exercice 24a). Alors $||A_{\gamma_n}(x)|| > n$ pour tout n, ce qui contredit le fait que la famille $\{A_\gamma\}$ est bornée sur le vecteur x, c.q.f.d.

Un corollaire important du théorème de Banach-Steinhaus est la complétude faible de l'espace $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ dans le cas où L_1 est un espace vectoriel métrique complet, L_2, un espace de Banach. On a en particulier le

Théorème 8. *Si L est un espace vectoriel métrique complet, l'espace dual L' est faiblement complet*).*

---

*) Il s'agit ici de la complétude pour la convergence opératorielle faible, c'est-à-dire la convergence $*$-faible dans l'espace dual.

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite faiblement fondamentale dans L'. Ceci signifie que pour tout $x \in L$ la suite numérique $\{f_n(x)\}$ est fondamentale, donc admet une limite que nous noterons $f(x)$. Pour prouver le théorème nous devons vérifier que $f \in L'$. La linéarité de f s'obtient par passage à la limite à partir de celle de f_n. La continuité de f résulte du corollaire du théorème de Banach-Steinhaus. En effet, la famille $\{f_n\}$ d'applications de L dans K est bornée sur tout vecteur $x \in L$. Donc, elle est équicontinue et par suite pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|f_n(x)| < \varepsilon$ sur la boule $B(0, \delta)$. En passant à la limite pour $n \to \infty$ on obtient que $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ sur la boule $B(0, \delta)$, ce qui prouve la continuité de f.

Un corollaire utile du théorème de Banach-Steinhaus se formule comme suit :

Théorème 9. *Dans l'espace normé L, tout ensemble faiblement borné X (c'est-à-dire tel que $|f(x)| \leqslant c(f)$ pour tout $x \in X$ et $f \in L'$) est borné.*

Démonstration. Traitons les éléments $x \in X$ comme des fonctionnelles linéaires sur L'. La famille X est bornée sur tout $f \in L'$ par hypothèse. Comme L' est complet, le théorème de Banach-Steinhauss nous dit que X est borné sur une boule $B(0, r)$ dans L', c'est-à-dire $|f(x)| \leqslant c$ pour tous les $x \in X$ et tous les $f \in B(0, r)$. D'après le corollaire 3 du théorème de Hahn-Banach (voir § 1 chapitre 3) il s'ensuit que $||x|| \leqslant c/r$ pour tous les $x \in X$, c'est-à-dire que X est borné.

Le troisième principe fondamental de l'analyse fonctionnelle linéaire est le

Théorème de Banach de l'opérateur réciproque. *Soient L_1 et L_2 des espaces vectoriels métriques complets, A, un opérateur linéaire continu appliquant biunivoquement L_1 sur L_2. Alors l'opérateur réciproque $A^{-1} : L_2 \to L_1$ est continu.*

Démonstration. Nous devons vérifier que $\forall \varepsilon > 0$ l'image de la boule $B(0, r) \subset L_1$ par l'application A contient un voisinage de 0 dans L_2, ce qui signifiera la continuité de A^{-1}. Utilisons le fait que pour tout $\varepsilon > 0$ la réunion $\bigcup_{n=1}^{\infty} n\mathring{B}(0, \varepsilon)$ contient L_1. Donc la réunion des images $X_n = A(n\mathring{B}(0, \varepsilon))$ contient L_2. Soit $\overline{X}_n$ l'adhérence de X_n. Montrons que $\overline{X}_n$ contient entièrement une boule de rayon positif dans L_2. S'il en était autrement, le complémentaire Y_n de $\overline{X}_n$ dans L_2 serait un ensemble ouvert partout dense. D'après l'exercice 32 l'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$ serait partout dense, alors qu'en réalité elle est vide. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$, $x_0 \in L_2$ et $r_0 > 0$, tels que $\overline{X}_n \supset \mathring{B}(x_0, r_0)$. Ceci signifie que l'adhérence de l'image de $\mathring{B}(0, \varepsilon)$ contient la boule $B(x_0/n, r_0/n)$. Choisissons ε assez petit pour que $\mathring{B}(0, \varepsilon) - \mathring{B}(0, \varepsilon) \subset \mathring{B}(0, r)$. On peut le faire puisque l'application $(x, y) \mapsto x - y$ est continue. Nous avons prouvé que l'adhérence de l'image de $\mathring{B}(0, \varepsilon)$ contient la boule $\mathring{B}(x_0/n, r_0/n)$. Donc, l'adhérence de l'image de $\mathring{B}(0, r)$

contient l'ensemble $\mathring{B}(x_0/n, r_0/n) - \mathring{B}(x_0/n, r_0/n)$ qui, à son tour, contient $\mathring{B}(0, r_0/n)$.

Ainsi, l'image de toute boule $\mathring{B}(0, r) \subset L_1$, $r > 0$ est dense dans une boule de la forme $\mathring{B}(0, \varrho) \subset L_2$. Supposons que l'image de la boule $\mathring{B}(0, r/2^n) \subset L_1$ est dense dans la boule $\mathring{B}(0, \varrho_n) \subset L_2$, $n = 1, 2, \ldots$ Sans restreindre la généralité on peut admettre que $\varrho_n \to 0$. Montrons que l'image de la boule $\mathring{B}(0, r)$ contient la boule $\mathring{B}(0, \varrho_1)$. Supposons que $y \in \mathring{B}(0, \varrho_1)$. L'image de $\mathring{B}(0, r/2)$ étant dense dans $\mathring{B}(0, \varrho_1)$ il existe un vecteur $x_1 \in \mathring{B}(0, r/2)$ tel que $d(y, Ax_1) < \varrho_2$. D'autre part, l'image de $\mathring{B}(0, r/4)$ étant dense dans $\mathring{B}(0, \varrho_2)$, il existe un vecteur $x_2 \in \mathring{B}(0, r/4)$ tel que $d(y - Ax_1, Ax_2) < \varrho_3$, et ainsi de suite. La série Σx_n converge dans L_1 vers un vecteur $x \in \mathring{B}(0, r)$. On a $d(y, Ax) = \lim_{n \to \infty} d(y, \Sigma Ax_n) = 0$, c.q.f.d.

Ce théorème est souvent utilisé dans la situation suivante. Soient données deux normes p_1 et p_2 sur un espace L, $p_2 \leqslant cp_1$ et l'espace L étant complet pour chacune d'elles. Alors les normes p_1 et p_2 sont équivalentes, c'est-à-dire $p_1 \leqslant c'p_2$ pour une constante c'. (Pour le prouver il suffit de considérer l'opérateur identité de (L, p_1) dans (L, p_2)).

Un raisonnement analogue est valable pour deux familles dénombrables de semi-normes faisant de L un espace métrique complet ; si une famille de semi-normes majore l'autre, alors ces systèmes définissent une même topologie. Cette circonstance est largement utilisée en théorie des distributions.

2. Ensembles et opérateurs compacts. On dit qu'un ensemble A dans un espace topologique X est un *compact* si de tout recouvrement de A par un système d'ensembles ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini ; A s'appelle *précompact* si son adhérence est compacte.

La définition suivante est plus commode si X est un espace métrique. On dit qu'un ensemble $A \subset X$ est un compact si de toute suite $\{a_n\}$ d'éléments de A on peut extraire une suite partielle $\{a_{n_k}\}$ convergente vers un élément $a \in A$. Nous sauterons la démonstration de l'équivalence de ces définitions et renvoyons le lecteur à un cours d'analyse plus détaillé, par exemple 8 ou 19. (Voir un résultat plus général dans l'exercice 369.)

D'une façon générale, les ensembles étudiés dans la suite sont contenus dans des espaces métriques complets. Ces ensembles sont justiciables du critère de Hausdorff de précompacité en termes de ε-réseau (on dit qu'un ensemble A est un ε-réseau pour un ensemble B si pour tout point $b \in B$ il existe $a \in A$ situé à une distance $\leqslant \varepsilon$).

Théorème 10. (Critère de Hausdorff). *Soient X un espace métrique complet, A, un sous-ensemble de X. Pour que A soit précompact il est nécessaire et suffisant que l'ensemble A possède un ε-réseau fini pour tout $\varepsilon > 0$.*

Démonstration. *Nécessité.* Supposons que A ne possède pas de ε-réseau fini pour un $\varepsilon > 0$. Choisissons un point arbitraire $a_1 \in A$ et construisons par récurrence une suite $\{a_n\}$ telle que $d(a_i, a_j) \geqslant \varepsilon$ pour $i \neq j$. Supposons

qu'on ait déjà construit l'intervalle $a_1, \ldots, a_n$ de la suite. Cet intervalle n'étant pas un ε-réseau pour A, il existe un point $a \in A$ situé à une distance $\geqslant \varepsilon$ de tous les points a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Prenons ce point pour a_{n+1}. La suite $\{a_n\}$ ainsi construite ne possède manifestement aucune sous-suite partielle convergente vers les éléments de $\bar{A}$, ce qui contredit la précompacité de A.

Suffisance. Supposons que A possède un ε-réseau fini pour tous les $\varepsilon > 0$ et soit $\{a_n\}$ une suite de A. Si $\{b_1, \ldots, b_m\}$ est un 1-réseau pour A, alors l'ensemble A est entièrement recouvert pas les boules $\mathring{B}(b_i, 1)$, $i = 1, \ldots, m$. Ceci signifie qu'une des boules renferme une infinité de termes de la suite $\{a_n\}$. Considérons cette boule et son recouvrement fini par des boules de rayon 1/2. (Ce recouvrement existe, puisque A possède un 1/2-réseau fini.) L'une au moins de ces boules contient une infinité de termes de la suite $\{a_n\}$. Recouvrons cette boule par un nombre fini de boules de rayon 1/4, et ainsi de suite. En définitive, on obtient un système de boules contractiles B_n de rayon 2^{-n} contenant chacune une infinité de termes de la suite $\{a_n\}$. Choisissons une suite partielle $\{a_{n_k}\}$ telle que $a_{n_k} \in B_k$. Cette suite partielle est fondamentale, donc converge vers un point appartenant à l'adhérence de A, c.q.f.d.

Corollaire. Dans un espace normé L de dimension finie il y a équivalence entre un ensemble précompact et un ensemble borné.

Démonstration. Si A est précompact, alors $\bar{A}$ est un compact et, par suite, un ensemble borné. Donc A est également borné. Inversement, supposons que A est borné. Construisons un ε-réseau fini pour A. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées dans L. L'ensemble A étant borné, il existe un nombre C tel que $|x_i| \leqslant C$, $1 \leqslant i \leqslant n$, pour tous les points $x \in A$ (comparer avec l'exercice 256). Soit R le rayon de la plus petite boule de L contenant le cube unité $\{x \in L : |x_i| \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Choisissons un nombre M assez grand pour que $R/M < \varepsilon$. Pour l' ε-réseau cherché on peut prendre l'ensemble des points de la forme $(k_1/M, \ldots, k_n/M)$, où k_i sont des entiers compris entre $-MC$ et $+MC$.

Remarque. On constate que le nombre d'éléments du ε-réseau construit est égal à $(2MC)^n$, c'est-à-dire est de l'ordre de $O(\varepsilon^{-n})$ pour $\varepsilon \to 0$. L'exposant n nous rappelle ici la dimension de l'espace L contenant le compact. Une caractéristique importante et intéressante d'un espace précompact A est le comportement asymptotique pour $\varepsilon \to 0$ de la fonction $N(\varepsilon)$ qui représente le nombre d'éléments du ε-réseau minimal pour A. En particulier, si $N(\varepsilon) \sim C \cdot \varepsilon^{-\gamma}$, on dit que A possède une *dimension approximative* γ. On démontre que dans un espace normé de dimension n il existe des sous-ensembles précompacts de dimension approximative arbitraire comprise entre 0 et n.

Dans les espaces de dimension infinie, un ensemble borné n'est pas nécessairement précompact.

Théorème 11. *Soit L un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors la boule unité $B = \{x \in L : \|x\| < 1\}$ dans L n'est pas un ensemble précompact.*

Démonstration. Supposons que B est un précompact. On peut alors la

recouvrir par un nombre fini de boules $B_1, \ldots, B_N$ de rayon $r < 1$. Considérons un sous-espace $L_n \subset L$ de dimension n contenant les centres de ces boules. Ce sous-espace existe à fortiori pour $n \geqslant N$. Soient $\tilde{B}, \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_N$ les intersections de $B, B_1, \ldots, B_N$ avec L_n. Il est évident que les ensembles $\tilde{B}$ et $\tilde{B}_i$ sont des boules de L_n de rayon 1 et r respectivement. Soit μ la mesure de Lebesgue dans L_n normée par la condition $\mu(\tilde{B}) = 1$. Alors $\mu(B_i) = r^n$. La boule B étant contenue dans la réunion B_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ on a $Nr^n \geqslant 1$. Or ceci est impossible pour $r < 1$ et n assez grand, c.q.f.d.

Le théorème suivant compense un peu le précédent.

Théorème 12. *Dans un espace normé réflexif L, tout ensemble faiblement borné est faiblement précompact.*

Nous allons prouver ce théorème sous l'hypothèse que l'espace L' est séparable, c'est-à-dire contient un sous-ensemble dénombrable dense $\{f_n\}$. Dans ce cas la topologie faible est métrisable sur chaque sous-ensemble faiblement borné $X \subset L$. En effet, si X est faiblement borné, il est fortement borné d'après le théorème 9. Donc X est contenu dans une boule de rayon r. Définissons une famille dénombrable de semi-normes $p_n(x) = |f_n(x)|$. Montrons que cette famille définit une topologie faible sur X. En effet, une base de la topologie faible de X est constituée des ensembles de la forme

$$U(x, f) = \{y \in X : |f(x-y)| < 1\}, \quad x \in L, \quad f \in L',$$

et de leurs intersections finies.

Soit f_i une fonctionnelle du sous-ensemble dense $\{f_n\}$ telle que $\|f-f_i\| < 1/(4r)$. Alors le sous-ensemble des $y \in X$ pour lesquels $p_i(y-x) < 1/2$ est contenu dans $U(x, f)$, puisque $|f(x-y)| = |f_i(x-y)+(f-f_i)(x-y)| < 1/2+\frac{1}{4r}\cdot 2r = 1$.

Prouvons maintenant que X est un ensemble faiblement précompact. Vérifions pour cela que de toute suite $\{x_n\} \subset X$ on peut extraire une suite partielle faiblement convergente dans l'adhérence de X. La suite numérique $f_i(x_n)$ étant bornée pour chaque i, en appliquant la méthode diagonale, on peut extraire une suite partielle convergente pour chaque semi-norme p_i. Cette suite partielle sera faiblement convergente, puisque la famille $\{p_i\}$ définit la topologie faible de X, c.q.f.d.

La théorie des ensembles convexes compacts constitue un domaine très attrayant de l'analyse fonctionnelle linéaire. Nous donnons ici le résultat le plus brillant et le plus utile de cette théorie, le théorème de Krein-Milman des points extrêmes.

Un point x d'un ensemble convexe K dans un e.v.t. est dit *extrême* s'il n'est pas milieu d'un intervalle entièrement contenu dans K. Exemples : dans un espace euclidien les points d'une sphère sont les points extrêmes de la boule limitée par cette sphère ; les sommets d'un cube sont des points extrêmes ; un ensemble ouvert ne possèdent pas de points extrêmes.

Théorème 13. (Krein-Milman). *Soient L un e.l.c., K un compact convexe dans L, E, un ensemble de points extrêmes de K. Alors K est confondu avec l'adhérence de l'enveloppe convexe de E.*

Démonstration. Voir les exercices 371 à 375.

On se sert de ce théorème pour prouver que des espaces de Banach ne sont pas isomorphes. (Comparer avec les exercices 376, 377, 378.) Une autre application est la démonstration élégante du théorème de Stone-Weierstrass (voir [29]).

Nous donnerons plus bas des critères de compacité d'un ensemble dans des espaces concrets. Nous allons étudier ici le cas de l'espace $C(X)$, car il intervient dans la théorie générale des espaces normés.

Théorème 14. (Arzela-Ascoli). *Soit $C(X)$ l'espace normé des fonctions réelles continues sur un compact métrique X de norme $\|f\| = \max_x |f(x)|$. Pour qu'une famille $A \subset C(X)$ soit précompacte, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit* 1) *uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que $|f(x)| \leqslant C$ pour $f \in A$ et* 2) *équicontinue (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, dès que $d(x, y) < \delta$ pour tous les $f \in A$).*

Démonstration. *Nécessité.* Supposons que A est précompacte. Elle admet alors un $\varepsilon/3$-réseau $f_1, \ldots, f_N$. Chacune des fonctions f_i est continue et par suite bornée sur X. D'où il résulte que A est uniformément bornée. Chaque fonction f_i est uniformément continue sur X. Il existe donc $\delta_i > 0$ tel que $|f_i(x)-f_i(y)| < \varepsilon/3$ pour $d(x, y) < \delta_i$. Si l'on considère le rectangle $f(x)$, $f_i(x)$, $f_i(y)$, $f(y)$ on déduit la propriété d'équicontinuité annoncée pour $\delta = \min(\delta_1 \ldots \delta_N)$.

Suffisance. Construisons un ε-réseau fini pour A si l'on sait que A est uniformément bornée et équicontinue. Supposons qu'on ait choisi δ tel que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/3$ pour $d(x, y) < \delta$ et $f \in A$. Sur le compact X il existe un δ-réseau fini $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Traitons la restriction de la fonction $f \in A$ à l'ensemble S comme un vecteur de l'espace $l_\infty(n, \mathbf{R})$. L'image de A dans $l_\infty(n, \mathbf{R})$ est un ensemble borné $\tilde{A}$. Donc $\tilde{A}$ est précompacte et possède un $\varepsilon/3$-réseau fini $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_N$. Montrons que les fonctions $f_1, \ldots, f_N$ forment un ε-réseau dans A. Supposons que $f \in A$. La restriction $\tilde{f}$ de f à S est située à une distance $\leqslant \varepsilon/3$ d'une fonction $\tilde{f}_i$ pour la métrique de $l_\infty(n, \mathbf{R})$. Majorons la distance de f à f_i dans $C(X)$. Soient x un point arbitraire de X et $x_k \in S$, le point le plus proche de lui. Alors $d(x, x_k) < \delta$. Donc $|f(x)-f(x_k)| < \varepsilon/3$ et $|f_i(x)-f_i(x_k)| < \varepsilon/3$. De plus, $|f(x_k)-f_i(x_k)| < \varepsilon/3$, d'après le choix de f_i. Donc $\|f-f_i\| < \varepsilon$, c.q.f.d.

L'exercice 379 contient un résultat plus général.

Définition. On dit qu'un opérateur A d'un espace normé L_1 dans un espace normé L_2 est *compact* (ou encore *complètement continu*) s'il envoie un ensemble borné dans un ensemble précompact.

Cette notion a été introduite par Hilbert lors de l'étude des opérateurs intégraux. Tout opérateur borné de *rang fini* (c'est-à-dire un opérateur dont l'image est de dimension finie) est un opérateur compact. En effet, tout ensemble borné est précompact dans un espace de dimension finie. On désignera par $\mathcal{K}(L_1, L_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de L_1 dans L_2.

Théorème 15. 1) *$\mathcal{K}(L_1, L_2)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ fermé pour la norme.*

2) *Si $A \in \mathcal{L}(L_0, L_1)$, $B \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$, $C \in \mathcal{L}(L_2, L_3)$, alors $C \circ B \circ A \in \mathcal{K}(L_0, L_3)$; en particulier $\mathcal{K}(L, L)$ est un idéal dans $\mathcal{L}(L, L)$.*

3) *Si $A \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$, alors l'opérateur adjoint $A' : L_2' \to L_1'$ appartient à $\mathcal{K}(L_2', L_1')$.*

Démonstration. 1) Soient A et B des opérateurs compacts de L_1 dans L_2, X, un sous-ensemble borné dans L_1. Les ensembles AX et BX sont précompacts. Donc, l'ensemble $\alpha AX+\beta BX$ l'est également, par suite $\alpha A+\beta B \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$. Supposons d'autre part que $A_n \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$ et $A_n \Rightarrow A$ pour $n \to \infty$. Prouvons que l'ensemble AX est précompact. Soit donné $\varepsilon > 0$. Choisissons un numéro n tel que $\|A-A_n\| < \varepsilon/(2R)$, où $R = \sup\limits_{x \in X} \|x\|$. Alors l'ensemble A_nX est un $\varepsilon/2$-réseau pour l'ensemble AX, puisque $\|Ax-A_nx\| < \varepsilon/2$ pour $x \in X$. L'ensemble A_nX est précompact par hypothèse, donc il admet un $\varepsilon/2$-réseau S fini. Il est évident que S est ε-réseau pour AX.

2) Soit X un ensemble borné dans L_0. Alors AX est un ensemble borné dans L_1, $B \circ AX$ est un ensemble précompact dans L_2. Montrons que l'ensemble $C \circ B \circ AX$ est précompact dans L_3. En effet, si S est un $\frac{\varepsilon}{\|C\|}$-réseau pour $B \circ AX$, alors CS est un ε-réseau fini pour $C \circ B \circ AX$.

3) Soient $A \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$, M, un ensemble borné dans L_2'. Prouvons que l'ensemble $A'M \subset L_1'$ est précompact. Construisons pour cela une injection isométrique de cet ensemble dans un espace de type $C(X)$. De façon précise, pour X nous prenons l'adhérence de l'ensemble AB, où B est la boule unité de l'espace L_1 (AB est précompact, puisque A est un opérateur compact, B un ensemble borné). A toute fonctionnelle $f \in A'M$ associons une fonction $\tilde{f}(x)$ sur X d'après la formule $\tilde{f}(x) = g(x)$, où $g \in M$ est choisie telle que $f = A'g$. (En général cette propriété ne définit pas g de façon unique, mais si $f = A'g_1 = A'g_2$, alors $g_1(x) = g_2(x)$ pour $x \in AB$. Donc la correspondance $f \mapsto \tilde{f}$ est correctement définie et est de toute évidence une injection.) Prouvons que cette correspondance est isométrique. En effet,

$$\|\tilde{f}\|_{C(X)} = \max_{x \in X} |\tilde{f}(x)| = \sup_{x \in AB} |g(x)| = \sup_{y \in B} |g(Ay)| =$$
$$= \sup_{y \in B} |A'g(y)| = \sup_{y \in B} |f(y)| = \|f\|_{L_1'}.$$

Reste à vérifier que les fonctions $\tilde{f}$ associées aux fonctionnelles $f \in A'M$ forment une famille uniformément bornée et équicontinue. Ceci découle des majorations

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant \|f\|_{L_1'} \leqslant \|A\| \, \|g\|_{L_2'} \leqslant \|A\| \cdot \operatorname{diam} M,$$
$$|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)| \leqslant \|g\|_{L_2} \|x-y\|_{L_2} \leqslant \operatorname{diam} M \cdot \|x-y\|_{L_2},$$

où $\operatorname{diam} M = \sup\limits_{g \in M} \|g\|_{L_2'}$, c.q.f.d.

Le théorème suivant décrit une propriété très importante des opérateurs compacts.

Théorème 16. *Les opérateurs compacts envoient les suites faiblement convergentes dans des suites fortement convergentes.*

Démonstration. Soient $A : L_1 \to L_2$ un opérateur compact, $x_n \rightharpoonup x$ dans L_1. Le théorème 9 nous dit que la suite $\{x_n\}$ est bornée pour la norme. Donc, la suite $\{Ax_n\}$ est précompacte. Par conséquent, il existe une suite partielle $\{Ax_{n_k}\}$ convergente vers un vecteur $y \in L_2$. Prouvons que la suite $\{Ax_n\}$ converge vers y. En effet, dans le cas contraire il existerait un $\varepsilon > 0$ et une suite partielle infinie $\{Ax_{m_k}\}$ telle que $\|Ax_{m_k} - y\| \geqslant \varepsilon$. Comme $\{Ax_{m_k}\}$ est un ensemble précompact, elle possède une suite partielle convergeant vers un vecteur $z \in L_2$. On peut admettre que $\{Ax_{m_k}\}$ est cette suite partielle. Il est évident que $\|y - z\| \geqslant \varepsilon$. D'après le corollaire 1 du théorème de Hahn-Banach il existe une fonctionnelle linéaire $f \in L_2'$, telle que $f(y) \neq f(z)$. Soit $\varphi = A'f \in L_1'$. Alors $\varphi(x_{n_k}) = f(Ax_{n_k}) \to f(y)$, $\varphi(x_{m_k}) = f(Ax_{m_k}) \to f(z)$. Ce qui contredit la convergence de la suite $\varphi(x_n)$, c.q.f.d.

Remarque. La propriété des opérateurs compacts qui vient d'être démontrée est caractéristique dans un espace dont le dual est séparable : tout opérateur borné envoyant une suite faiblement convergente dans une suite fortement convergente est compact. En effet, dans ce cas la topologie faible sur les ensembles bornés est métrisable, donc est définie par la convergence des suites. Par conséquent, notre opérateur est continu si l'on munit L_1 de la topologie faible et L_2 de la topologie forte. Les ensembles bornés étant faiblement précompacts, leurs images sont fortement précompactes.

3. Théorie des opérateurs de Fredholm. Soient L_1 et L_2 des espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$. L'équation

$$T(x) = y, \quad x \in L_1, \quad y \in L_2, \tag{8}$$

est la généralisation naturelle d'un système d'équations algébriques linéaires au cas infinidimensionnel. Il se trouve que sous certaines conditions supplémentaires la théorie de tels systèmes est presque entièrement confondue avec la théorie finidimensionnelle. Il existe cependant quelques distinctions. Outre la difficulté de démonstration une nouvelle notion intervient dans le cas infinidimensionnel : l'indice d'un opérateur linéaire. Nous allons introduire cette notion par étapes. Désignons par $\ker T$ le *noyau* d'un opérateur T, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les solutions de l'équation

$$Tx = 0, \quad x \in L_1. \tag{9}$$

Par $\operatorname{im} T$ nous désignons *l'image* de l'opérateur T, c'est-à-dire l'ensemble de tous les $y \in L_2$ pour lesquels l'équation (8) admet une solution. Il est évident que $\ker T$ est un sous-espace fermé (en tant qu'image réciproque d'un point par une application continue). L'ensemble $\operatorname{im} T$ n'est pas toujours fermé (voir exercice 392). Nous considérons aussi l'opérateur adjoint

$T' \in \mathcal{L}(L_2', L_1')$ et les équations correspondantes

$$T'g = f, \quad g \in L_2', \quad f \in L_1', \tag{10}$$

$$T'g = 0, \quad g \in L_2'. \tag{11}$$

Si $\operatorname{im} T$ et $\operatorname{im} T'$ sont des sous-espaces fermés, on peut alors définir les espaces de Banach

$$\operatorname{coker} T = L_2/\operatorname{im} T \quad \text{et} \quad \operatorname{coker} T' = L_1'/\operatorname{im} T'$$

qui sont appelés *conoyaux* des opérateurs T et T' respectivement. Posons

$$\alpha(T) = \dim \ker T, \quad \beta(T) = \dim \operatorname{coker} T,$$
$$i(T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

On dit qu'un opérateur T est de *Fredholm* si les nombres $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ sont finis. Dans ce cas le nombre $i(T)$ s'appelle *indice* de l'opérateur T.

En dimension finie, lorsque $\dim L_1 = N_1$, $\dim L_2 = N_2$, on vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} N_1 - \alpha(T) &= N_2 - \beta(T) = \operatorname{rang} T, \\ N_2 - \alpha(T') &= N_1 - \beta(T') = \operatorname{rang} T', \end{aligned} \tag{12}$$

ce qui, avec l'égalité $\operatorname{rang} T = \operatorname{rang} T'$ (théorème du rang d'une matrice), donne

$$\alpha(T) = \beta(T'), \quad \beta(T) = \alpha(T'), \quad i(T) = -i(T'). \tag{13}$$

On se propose dans ce numéro de démontrer la relation (13) pour le cas infini (pour des opérateurs de Fredholm) et de définir des critères commodes pour le calcul de l'indice et la résolution des équations (8) à (11).

Soit donnée une suite d'espaces linéaires et d'opérateurs linéaires :

$$\ldots \to L_{k-1} \xrightarrow{T_k} L_k \xrightarrow{T_{k+1}} L_{k+1} \to \ldots \tag{14}$$

Cette suite est dite *exacte en un terme* L_k si $\operatorname{im} T_k = \ker T_{k+1}$. On dit que la suite (14) est *exacte* si elle est exacte en chaque terme. Il est évident que l'exactitude en L_k entraîne l'égalité $T_{k+1} \circ T_k = 0$. Cette propriété s'appelle *semi-exactitude*. Si la suite (14) est semi-exacte en L_k, alors $\operatorname{im} T_k \subset \ker T_{k+1}$. L'espace quotient $H_k = \ker T_{k+1}/\operatorname{im} T_k$ mesure « l'inexactitude » du terme L_k. On l'appelle k-ième *espace de cohomologie* de la suite (14). Si $H_k = \{0\}$ pour tous les k, alors la suite (14) est exacte.

Nous nous intéresserons au cas, où tous les espaces L_k sont de Banach, et les opérateurs T_k, continus. Le résultat principal est le

Théorème 17. *Soit donnée une suite exacte* (14) *d'espaces de Banach et d'opérateurs continus. Alors la suite duale*

$$\ldots \leftarrow L_{k-1}' \xleftarrow{T_k'} L_k' \xleftarrow{T_{k+1}'} L_{k+1}' \leftarrow \ldots \tag{15}$$

est aussi exacte.

Démonstration. Nous commençons par étudier un cas particulier. Plus exactement, on suppose que la suite (14) est de la forme

$$0 \to L_1 \xrightarrow{T} L_2 \to 0, \tag{16}$$

où 0 désigne l'espace trivial (de dimension 0) et, de façon respective, que la suite (15) est de la forme

$$0 \leftarrow L_1' \xleftarrow{T'} L_2' \leftarrow 0. \tag{17}$$

L'exactitude de la suite (16) signifie que $\ker T = \{0\}$ et $\operatorname{im} T = L_2$, c'est-à-dire T est un isomorphisme pour la structure d'espace vectoriel (mais pas pour la structure d'espace de Banach !) de L_1 et L_2. Le théorème de Banach de l'opérateur réciproque nous dit que T^{-1} est continu et par suite réalise un isomorphisme topologique (homéomorphisme linéaire) des espaces de Banach L_1 et L_2. Donc T' est un isomorphisme entre L_2' et L_1', d'où l'exactitude de la suite (17). Ainsi, le théorème 17 résulte dans ce cas particulier élémentaire du théorème de Banach. On vérifie que la réciproque est vraie : le théorème de Banach est une conséquence du théorème 17.

Revenons au cas général. La semi-exactitude de la suite duale est évidente, puisque $T_k' \circ T_{k+1}' = (T_{k+1} \circ T_k)' = 0$. Reste à prouver que $\operatorname{im} T_{k+1} \supset \ker T_k'$. Soit $f \in \ker T_k'$. Il est équivalent de dire que la fonctionnelle $f \in L_k'$ s'annule sur $\operatorname{im} T_k = \ker T_{k+1}$. Donc, elle définit une fonctionnelle linéaire F_0 sur le sous-espace $\operatorname{im} T_{k+1} \subset L_{k+1}$ à l'aide de la formule $F_0(T_{k+1}(x)) = f(x)$. L'espace $\operatorname{im} T_{k+1}$ est muni de deux normes : l'une induite à partir de L_{k+1}, l'autre, à partir de $L_k/\ker T_{k+1}$ par l'opérateur T_{k+1}. L'opérateur T_{k+1} étant borné, la première norme est majorée par la seconde. Ces normes doivent être équivalentes d'après le théorème de Banach. Donc, F_0 est continue pour la topologie de L_{k+1} et, d'après le théorème de Hahn-Banach, est continûment prolongeable en une fonctionnelle $F \in L_{k+1}'$. Il est évident que $T_{k+1}'F = f$, ce qui prouve le théorème.

Ce théorème admet une réciproque et une généralisation (voir exercice 397, 398).

Théorème 18. *Soit T un opérateur de Fredholm de $\mathcal{L}(L_1, L_2)$, alors $T' \in \mathcal{L}(L_2', L_1')$ est aussi un opérateur de Fredholm et l'on a les égalités* (13).

Démonstration. Par définition des espaces $\ker T$ et $\operatorname{coker} T$ on a la suite exacte

$$0 \to \ker T \xrightarrow{i} L_1 \xrightarrow{T} L_2 \xrightarrow{p} \operatorname{coker} T \to 0,$$

où i est une injection, p, un projecteur naturel. D'après le théorème 17, il s'ensuit que la suite

$$0 \leftarrow (\ker T)' \xleftarrow{i'} L_1' \xleftarrow{T'} L_2' \xleftarrow{p'} (\operatorname{coker} T)' \leftarrow 0$$

est exacte. Or, cela signifie qu'on a les isomorphismes

$$\ker T' \approx (\operatorname{coker} T)', \quad \operatorname{coker} T' \approx (\ker T)', \tag{18}$$

d'où il résulte que T' est de Fredholm et que les égalités (12) et (13) sont vraies.

Un exemple d'opérateur de Fredholm nous est donné par tout opérateur inversible $T \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$, c'est-à-dire un opérateur pour lequel existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(L_2, L_1)$ tel que $T \circ S = 1_{L_2}$, $S \circ T = 1_{L_1}$. Dans ce cas $\alpha(T) = \beta(T) = 0$. Il apparaît que les opérateurs de Fredholm sont proches des opérateurs inversibles dans un certain sens.

On dira qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ est *quasi inversible* si existent des opérateurs S_1 et S_2 dans $\mathcal{L}(L_2, L_1)$ tels que

$$S_1 \circ T = 1_{L_1} + K_1, \quad T \circ S_2 = 1_{L_2} + K_2, \tag{19}$$

où $K_1 \in \operatorname{End} L_1$ et $K_2 \in \operatorname{End} L_2$ sont des opérateurs compacts.

Théorème 19. (S. Nikolski). *Tout opérateur de Fredholm est quasi inversible. De plus, on peut choisir les opérateurs S_1 et S_2 tels que K_1 et K_2 soient de rang fini.*

Démonstration. Montrons qu'il existe un sous-espace fermé $M \subset L_1$ et un sous-espace de dimension finie $N \subset L_2$ tels que $L_1 = \ker T \oplus M$, $L_2 = \operatorname{im} T \oplus N$ (comparer avec les exercices 337 a) et b)). Choisissons dans $\ker T$ une base $x_1, \ldots, x_{\alpha(T)}$ et dans $\ker (T)'$ une base duale $f_1, f_2, \ldots, f_{\alpha(T)}$. (La dualité de ces bases exprime que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$*) ; $i, j = 1, \ldots, \alpha(T)$.) Prolongeons d'après le théorème de Hahn-Banach les fonctionnelles f_i en des fonctionnelles linéaires continues $F_i \in L_1'$ et posons $M = \bigcap_{i=1}^{\alpha(T)} \ker F_i$.

Alors pour tout $x \in L_1$ on a la représentation unique

$$x = \sum_{i=1}^{\alpha(T)} c_i x_i + y, \quad \text{où} \quad y \in M. \tag{20}$$

En effet, en appliquant F_i aux deux membres de l'égalité, on voit que $c_i = F_i(x)$. Réciproquement, si les coefficients c_i sont ainsi choisis, le vecteur y appartient nécessairement à M. Donc, $L_1 = \ker T \oplus M$.

Supposons maintenant que $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{\beta(T)}$ est une base dans $\operatorname{coker} T = L_2/\operatorname{im} T$ et soit z_i un représentant de la classe $\tilde{z}_i$. Désignons par N l'enveloppe linéaire des vecteurs z_i, $1 \leqslant i \leqslant \beta(T)$. Soient z un vecteur arbitraire de L_2, $\tilde{z}$, son image dans coker T. On a alors la représentation unique $\tilde{z} = \sum_{i=1}^{\beta(T)} c_i \tilde{z}_i$, d'où résultent l'existence et l'unicité de la représentation de z sous la forme

$$z = \sum_{i=1}^{\beta(T)} c_i z_i + t, \quad \text{où} \quad t \in \operatorname{im} T. \tag{21}$$

Donc $L_2 = \operatorname{im} T \oplus N$. D'après le théorème de Banach, l'opérateur $T|_M$ réalise un isomorphisme topologique entre M et im T. Désignons par

*) δ_{ij} désigne comme toujours le symbole de Kronecker : $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

$\check{T}$ l'opérateur réciproque de $T|_M$ et définissons l'opérateur $S \in \mathcal{L}(L_2, L_1)$ par

$$S(z) = \check{T}(t), \tag{22}$$

où $z \in L_2$ et $t \in \operatorname{im} T$ sont reliés par la relation (21). On peut calculer sans peine les opérateurs ST et TS à l'aide des développements (20) et (21) :

$$S \circ T(x) = S \circ T\left(\sum_{i=1}^{\alpha(T)} c_i x_i + y\right) = S \circ T(y) = y,$$

$$T \circ S(z) = T \circ S\left(\sum_{j=1}^{\beta(T)} c_j z_j + t\right) = T \circ \check{T}(t) = t.$$

D'où $K_1 = ST - 1_{L_1} : \ x \mapsto -\sum_{i=1}^{\alpha(T)} F_i(x) x_i, \quad K_2 = TS - 1_{L_2} : \ z \mapsto -\sum_{j=1}^{\beta(T)} c_j z_j,$
où c_j sont les coordonnées du vecteur $\tilde{z}$ dans la base $\{\tilde{z}_i\}$, c.q.f.d.

Signalons que les opérateurs K_1 et K_2 construits dans la démonstration du théorème sont des projecteurs (respectivement sur l'espace $\ker T$ parallèlement à M et sur N parallèlement à $\operatorname{im} T$).

Théorème 20. (F. Riesz). *Si $K \in \operatorname{End} L$ est un opérateur compact, alors l'opérateur $T = 1 - K$ est de Fredholm.*

Démonstration. L'espace $\ker T$ est constitué de tous les vecteurs x pour lesquels $K(x) = x$. Donc, dans $\ker T$ l'opérateur K est à la fois compact et unité. D'où il résulte que $\ker T$ est de dimension finie (comparer avec l'exercice 381).

Choisissons le sous-espace fermé $M \subset L$, complémentaire de $\ker T$, comme dans la démonstration du théorème 19. L'opérateur T réalise une bijection de M sur $\operatorname{im} T$. Soit $\check{T}$ l'application réciproque. Montrons que l'opérateur $\check{T}$ est borné $\left(\text{c'est-à-dire } \dfrac{\|\check{T}(y)\|}{\|y\|} \leqslant c < \infty \text{ pour tout } y \in \operatorname{im} T\right)$. S'il en était autrement, il existerait une suite de vecteurs unitaires $\{x_n\} \subset M$ pour lesquels $y_n = T(x_n) \to 0$. Mais $T(x_n) = x_n - K(x_n)$. La suite $\{x_n\}$ est bornée, donc la suite $\{K(x_n)\}$ est précompacte. Quitte à passer à une suite partielle, on peut admettre que $\{K(x_n)\}$ a une limite x. Comme $T(x_n) \to 0$, il s'ensuit que $x_n \to x$. Le vecteur x est contenu dans M (puisque M est fermé), admet une norme unité (en tant que limite de x_n) et est tel que $T(x) = 0$ (puisque T est continu et $T(x_n) \to 0$). Donc, $x \in M \cap \ker T$, ce qui est impossible. Nous avons démontré que $\check{T}$ est borné. Déduisons maintenant de là que $\operatorname{im} T$ est fermé.

Supposons que $y_n \in \operatorname{im} T$ et $y_n \to y$. Alors la suite y_n est fondamentale, donc la suite $x_n = \check{T}(y_n)$. Le sous-espace M étant complet (voir théorème 2, chapitre 1), il existe $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Alors $T(x) = \lim_{n \to \infty} T(x_n) = \lim_{n \to \infty} y_n = y$, ce qui prouve que $\operatorname{im} T$ est fermé. Reste à prouver que $\beta(T) < \infty$, autrement dit que $\operatorname{coker} T$ est de dimension finie. Ceci résulte des relations (18) et de la

proposition déjà prouvée de la finitude du noyau appliquée à l'opérateur T'. (Nous utilisons ici un théorème qui dit que K' est compact si K l'est.)

De ce qui précède on déduit le

Critère pour un opérateur d'être de Fredholm. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ est de Fredholm si, et seulement si, il est quasi inversible.*

Démonstration. La condition suffisante constitue le théorème 19. Prouvons la condition nécessaire.

Supposons que T est quasi inversible, c'est-à-dire qu'on a (19). Alors $\ker T \subset \ker S_1 \circ T = \ker(1+K_1)$. Le dernier espace est de dimension finie d'après le théorème de Riesz. D'autre part, $\operatorname{im} T \supset \operatorname{im} T \circ S_2 = \operatorname{im}(1+K_2)$. Le dernier espace est fermé et de codimension finie dans L_2 d'après le théorème de Riesz. Alors $\operatorname{im} T$ possède les mêmes propriétés (en tant qu'image réciproque de $\operatorname{im} T/\operatorname{im} T \circ S_2 \subset L_2/\operatorname{im} T \circ S_2$), ce qui achève la démonstration du critère. Désignons par $\mathcal{F}(L_1, L_2)$ l'ensemble de tous les opérateurs de Fredholm de L_1 dans L_2.

Théorème 21. *L'ensemble $\mathcal{F}(L_1, L_2)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ (pour la topologie uniforme) et invariant par les K-translations où $K \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{F}(L_1, L_2)$. Alors T est quasi inversible et l'on a les relations (19). Supposons que la norme de l'opérateur $A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ est strictement inférieure à chacun des nombres $\|S_1\|^{-1}$, $\|S_2\|^{-1}$. Alors les opérateurs $1+S_1A$ et $1+AS_2$ sont inversibles. $\Big($Si $\|B\| < 1$, alors pour $(1+B)^{-1}$ on peut prendre la somme de la série convergente $\sum_{k=0}^{\infty} (-B)^k.\Big)$ Donc,

$$\begin{aligned}(1+S_1A)^{-1}S_1(T+A) &= (1+S_1A)^{-1}(1+K_1+S_1A) = \\ &= 1+(1+S_1A)^{-1}K_1 = 1+\tilde{K}_1,\\ (T+A)S_2(1+AS_2)^{-1} &= (1+K_2+AS_2)^{-1} = \\ &= 1+K_2(1+AS_2)^{-1} = 1+\tilde{K}_2,\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'opérateur $T+A$ est quasi inversible. Par suite, $\mathcal{F}(L_1, L_2)$ contient un voisinage du point T.

Soient maintenant $T \in \mathcal{F}(L_1, L_2)$, $K \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$. Les égalités

$$\begin{aligned}S_1(T+K) &= 1+K_1+S_1K = 1+\tilde{K}_1,\\ (T+K)S_2 &= 1+K_2+KS_2 = 1+\tilde{K}_2\end{aligned}$$

montrent que $T+K$ est quasi inversible. (Nous avons utilisé le fait que le produit d'un opérateur compact par un opérateur borné est un opérateur compact), c.q.f.d.

Théorème 22. *La fonction i (indice) est localement constante sur $\mathcal{F}(L_1, L_2)$, invariante par les K-translations où $K \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$ et possède la propriété $i(AB) = i(A)\,i(B)$, où $A \in \mathcal{F}(L_0, L_2)$, $B \in \mathcal{F}(L_1, L_0)$.*

Démonstration. Nous commençons par prouver un lemme technique utile qui nous permettra d'expliciter parfois l'indice d'un opérateur. Supposons que les espaces L_1 et L_2 sont décomposés en des sommes directes des sous-espaces fermés : $L_i = M_i \oplus N_i$, $i = 1, 2$. Alors tout opérateur $T \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ peut être écrit sous forme d'une matrice opératorielle d'ordre deux : $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{L}(N_1, N_2)$, $B \in \mathcal{L}(M_1, N_2)$, $C \in \mathcal{L}(N_1, M_2)$, $D \in \mathcal{L}(M_1, M_2)$.

Lemme. *Si un opérateur T est de Fredholm et D inversible, alors $i(T) = i(A-BD^{-1}C)$.*

Démonstration du lemme. On remarquera que le produit de l'opérateur T à gauche ou à droite par un opérateur inversible ne change pas $\alpha(T)$ et $\beta(T)$, donc l'indice de T. Par suite,

$$i(T) = i\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = i\left[\begin{pmatrix} 1 & -BD^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D^{-1}C & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= i\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Si l'opérateur T est de la forme $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ (on peut le représenter naturellement par $T_1 \oplus T_2$), alors $\ker T = \ker T_1 \oplus \ker T_2$, $\operatorname{coker} T = \operatorname{coker} T_1 \oplus \operatorname{coker} T_2$. D'où $i(T) = i(T_1) + i(T_2)$. Dans notre cas, $i(T) = i(A-BD^{-1}C) + i(D) = i(A-BD^{-1}C)$. Ce qui prouve le lemme.

Supposons maintenant que $T_0 \in \mathcal{F}(L_1, L_2)$. Posons $N_1 = \ker T_0$, $M_2 = \operatorname{im} T_0$ et construisons un sous-espace fermé $M_1 \subset L_1$ et un sous-espace de dimension finie $N_2 \subset L_2$ comme dans la démonstration du théorème 19. Alors l'opérateur T_0 est de la forme $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$, où D_0 est un opérateur inversible. Tout opérateur T assez proche en norme de T_0 est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où D est un opérateur inversible. D'après le lemme prouvé, T dépend seulement de la dimension de N_1 et de N_2 : $i(T) = i(A-BD^{-1}C) = \dim N_1 - \dim N_2$ (cf. (12)).

Prouvons la deuxième proposition du théorème. Supposons que $T \in \mathcal{F}(L_1, L_2)$, $K \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$. Considérons la fonction $\varphi(T) = i(T+tK)$ définie sur la droite réelle tout entière (puisque l'ensemble $\mathcal{F}(L_1, L_2)$ est invariant par les K-translations, où $K \in \mathcal{K}(L_1, L_2)$). D'après la proposition déjà prouvée, cette fonction est constante localement, donc constante sur tout ensemble connexe et, en particulier, sur la droite. Par conséquent, $i(T) = \varphi(0) = \varphi(1) = i(T+K)$.

Prouvons la troisième proposition. Considérons à cet effet un opérateur auxiliaire $A \oplus B$ de $L_0 \oplus L_1$ dans $L_2 \oplus L_0$. Comme indiqué plus haut,

$i(A \oplus B) = i(A) + i(B)$. D'autre part, pour ε assez petit on a

$$i\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} A & 0 \\ \varepsilon 1_{L_0} & B \end{pmatrix} =$$

$$= i\left[\begin{pmatrix} 1_{L_2} & -\varepsilon^{-1}A \\ 0 & 1_{L_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ \varepsilon 1_{L_0} & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}1_{L_0} & B \\ 0 & -\varepsilon 1_{L_0} \end{pmatrix}\right] = i\begin{pmatrix} 0 & AB \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i(AB).$$

Ce qui prouve le théorème.

Alternative de Fredholm. *Soient L un espace de Banach, K, un opérateur compact dans L, λ, un nombre non nul. Considérons les quatre équations :*

1) $Kx - \lambda x = y$,

2) $Kx - \lambda x = 0$,

3) $K'f - \lambda f = g$,

4) $K'f - \lambda f = 0$,

où $x, y \in L$, f, $g \in L'$. Alors ou bien a) *les équations* 2) *et* 4) *n'admettent que la solution triviale et les équations* 1) *et* 3) *admettent une solution correcte unique quel que soit le second membre, ou bien* b) *l'équation* 2) *admet un espace fini de solutions $L_1 \subset L$ et l'équation* 4), *un espace de dimension finie de solutions $L_2 \subset L'$, et, de plus,* $\dim L_1 = \dim L_2$. *L'équation* 1) *admet une solution exacte pour les $y \in L$ tels que $f(y) = 0$ pour tous les $f \in L_2$. L'équation* 3) *admet une solution exacte pour les $g \in L'$ tels que $g(x) = 0$ pour tous les $x \in L_1$.*

Démonstration. L'opérateur $\lambda 1$ est inversible, donc c'est un opérateur de Fredholm d'indice nul. Il en est de même de l'opérateur $T = K - \lambda 1$ d'après le théorème 22. Le premier cas de l'alternative correspond à l'égalité $\alpha(T) = 0$. Alors $\beta(T) = \alpha(T) + i(T) = 0$, d'où $\alpha(T') = \beta(T') = 0$. Donc, $\ker T = \ker T' = \{0\}$, $\operatorname{im} T = L$, $\operatorname{im} T' = L'$. Le théorème de Banach nous dit que les équations 1) et 3) admettent une solution correcte (c'est-à-dire T^{-1} et $(T')^{-1}$ sont continus).

Le deuxième cas de l'alternative est caractérisé par l'inégalité $\alpha(T) \neq 0$. Comme T est de Fredholm, on a $\alpha(T) < \infty$. D'après les formules (13) on a $-i(T) = i(T') = 0$, donc $\beta(T) = \alpha(T)$, $\alpha(T') = \beta(T') = \alpha(T)$. De plus $\ker T' = (\operatorname{im} T)^{\perp}$*), $\operatorname{im} T' = (\ker T)^{\perp}$, c.q.f.d.

Signalons que l'alternative de Fredholm entraîne la propriété spectrale suivante pour les opérateurs compacts : si $\lambda \neq 0$ est un point du spectre (c'est-à-dire l'opérateur $K - \lambda 1$ est inversible), alors λ est une valeur propre de multiplicité finie.

---

*) Si L est un e.v.t., L', l'espace dual, X, un sous-ensemble dans L, alors par $X^{\perp}$ on désigne l'ensemble de toutes les $f \in L'$ telles que $f(x) = 0$ pour tous les $x \in X$.

§ 3. Espaces fonctionnels et distributions

1. Espaces des fonctions intégrables. Soit X un ensemble muni d'une mesure μ. Désignons par $L_p(X, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions μ-mesurables de puissance p-ième sommable. Pour $f \in L_p(X, \mu)$ posons

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

(Nous identifions ici la classe d'équivalence $f \in L_p(X, \mu)$ et $f(x) \in f$.) Il n'est pas évident à priori que $L_p(X, \mu)$ soit un espace vectoriel normé pour $p \neq 1$. Cette circonstance est une conséquence de l'inégalité de Minkowski : $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ qui à son tour résulte de l'inégalité de Hölder : $\left|\int_X fg \, d\mu\right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$, si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (comparer avec les exercices 416, 417). Si la mesure est ponctuelle et σ-finie, ces inégalités se transforment en les inégalités respectives pour des suites.

Considérons encore l'espace $L_\infty(X, \mu)$ des fonctions μ-mesurables essentiellement bornées (comparer avec le numéro 1 § 3 chapitre II).

Théorème 23. *Les espaces $L_p(X, \mu)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$. L'espace dual de $L_p(X, \mu)$ est isomorphe de l'espace $L_q(X, \mu)$ pour $1 \leqslant p < \infty$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.*

Démonstration. Soit F une fonctionnelle linéaire continue sur $L_p(X, \mu)$. Si $A \subset X$ est un ensemble de mesure finie, alors sa fonction caractéristique χ_A appartient à $L_p(X, \mu)$. Posons $\nu(A) = F(\chi_A)$ et vérifions que ν est une charge sur l'algèbre des sous-ensembles mesurables de X. L'additivité de ν découle de la linéarité de F. L'absolue continuité de ν par rapport à la mesure μ résulte de la majoration $|\nu(A)| \leqslant \|F\|_{L'_p} \|\chi_A\|_{L_p} = \|F\|_{L'_p} \mu(A)^{1/p}$. Le théorème de Radon-Nikodym (voir chapitre 2, § 3, n° 3) affirme l'existence d'une fonction μ-mesurable g sur X telle que $U(A) = \int_A g(x) \, d\mu(x)$ pour tout ensemble A de mesure finie. Montrons que $g \in L_q(X, \mu)$. Remarquons à cet effet que d'après la remarque qui suit l'inégalité de Hölder (voir page 51 et exercice 416), pour toute fonction μ-mesurable g, on a

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \left|\int_X fg \, d\mu\right|. \tag{23}$$

Il est évident aussi qu'il suffit de prendre la borne supérieure du second membre de (23) sur les fonctions simples f de $L_p(X, \mu)$. Or, pour les fonctions de la forme $f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}(x)$, on a

$$\int_X f(x) g(x) \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} c_k \int_{E_k} g(x) \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} c_k \nu(E_k) = F(f).$$

Donc, le second membre de (23) est borné par le nombre $||F||_{L'_p}$. Donc, $g \in L_q(X, \mu)$. D'après l'inégalité de Hölder, $F_g(f) = \int_X f(x)g(x)\,d\mu(x)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $L_p(X, \mu)$. Comme F et F_g sont confondues sur les fonctions simples, elles le sont partout sur $L_p(X, \mu)$. En appliquant encore une fois la relation (23), on constate que $||g||_q = ||F||_{L'_p}$. Ceci démontre l'isomorphisme $L'_p(X, \mu) = L_q(X, \mu)$. La complétude de $L_p(X, \mu)$, $1 < p \leqslant \infty$, résulte maintenant du théorème général de complétude de l'espace dual (voir n° 1, § 1, chapitre III). La complétude de $L_1(X, \mu)$ a été démontrée au chapitre II, § 3.

Le théorème 23 de l'isomorphisme de $L'_p(X, \mu)$ et $L_q(X, \mu)$ est mis en défaut pour $p = \infty$. L'espace $L'_\infty(X, \mu)$ n'est pas isomorphe à $L_1(X, \mu)$ à l'exception du cas trivial, où il est de dimension finie. On montre que l'espace de dimension infinie $L_1(X, \mu)$ pour une mesure non ponctuelle μ n'est en général le dual d'aucun espace de Banach (comparer avec l'exercice 436).

2. Espaces des fonctions continues. Soit X un compact. L'espace $C(X)$ est constitué de toutes les fonctions continues sur X. On définit une norme sur $C(X)$ par

$$||f|| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

Il est immédiat de vérifier (voir exercice 438) que $C(X)$ est un espace de Banach.

Théorème 24. *Tout espace de Banach L est isomorphe à un sous-espace fermé d'un espace de type $C(X)$. Si L est séparable, pour X on peut prendre l'intervalle* [0, 1].

Démonstration. Supposons que X est la boule unité de l'espace L' dual de L. Alors X est un compact pour la topologie $*$-faible (voir [9]). Chaque élément de l'espace L peut être traité comme une fonction linéaire sur X. D'après ce qui a été dit au n° 2 § 1, l'application L dans $C(X)$ ainsi obtenue est un isomorphisme sur le sous-espace fermé de toutes les fonctions linéaires sur X. Supposons que L est séparable. Alors $X \subset L'$ est un espace topologique métrisable (voir § 1, n° 1). Si X est un compact métrique convexe dans un espace vectoriel, il existe une application continue f de [0, 1] sur X (voir exercice 452). Définissons maintenant l'application de L dans $C[0, 1]$: $\varphi \mapsto \Phi(t) = [f(t)](\varphi)$. D'après ce qui précède, cette application est un isomorphisme de L sur un sous-espace fermé de $C[0, 1]$.

Théorème 25. *L'espace dual de $C[0, 1]$ est isomorphe à l'espace $V[0, 1]$ des fonctions g à variation bornée sur* [0, 1], *continues à gauche, telles que $g(0) = 0$, de norme $||g|| = \mathrm{Var}_0^1\, g$.*

Démonstration. Supposons que $g \in V[0, 1]$, $f \in C[0, 1]$. Posons $F_g(f) = \int_0^1 f(x)\,dg(x)$. Pour toute partition $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = 1$ et tous $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(t_i) - g(t_{i-1})] \leqslant ||f||_{C[0,1]}\,||g||_{V[0,1]}.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition T de $[0, 1]$ telle que $\sum_{i=1}^{n} |g(t_i)-g(t_{i-1})| > \mathrm{Var}_0^1 g-\varepsilon$. Nous pouvons admettre et admettrons que la fonction g est continue sur T. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues telles que $|f_n(x)| \leqslant 1$ et $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{sgn}\,[g(t_k)-g(t_{k-1})]$, $x \in [t_{k-1}, t_k[$.

Alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dg(x) = \sum_{x=1}^{n} |g(t_k)-g(t_{k-1})|$. Donc, $\int_0^1 f_n\,dg(x) >$ $> \mathrm{Var}_0^1 g-\varepsilon$ pour n assez grand. D'où $\|F_g\|_{C'[0,1]} = \|g\|_{V[0,1]}$.

Reste à démontrer que toute fonctionnelle linéaire continue F sur $C[0, 1]$ est de la forme F_g, où $g \in V[0, 1]$. Prolongeons F d'après le théorème de Banach en une fonctionnelle $\tilde{F}$ sur l'espace $B[0, 1]$ des fonctions bornées de norme $\|f\| = \sup |f(x)|$. Soit χ_a la fonction caractéristique de l'intervalle semi-ouvert $[0, a[$. Posons $g(a) = \langle \tilde{F}, \chi_a \rangle$. Il est évident que $g(0) = 0$. Prouvons que $\mathrm{Var}_0^1 g(x) < \infty$. Pour toute partition T posons $\varepsilon_T(x) = \mathrm{sgn}\,[g(t_k)-g(t_{k-1})]$, $x \in [t_{k-1}, t_k[$, alors $\langle \tilde{F}, \varepsilon_T \rangle =$ $= \sum_{k=1}^{n} |g(t_k)-g(t_{k-1})|$, d'où $\mathrm{Var}_0^1 g \leqslant \|\tilde{F}\| = \|F\|$.

Pour toute fonction φ continue à droite constante par morceaux sur $[0, 1]$ on a : $\langle \tilde{F}, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x)\,dg(x)$. La fonction continue f peut être uniformément approximée par de telles φ_n : par exemple $\varphi_n(x) = f([nx]/n)$. Donc, $\langle \tilde{F}, f \rangle = \int_0^1 f(x)\,dg(x)$ est valable pour toutes les fonctions continues f. Reste à remarquer qu'en remplaçant $g(x)$ par $g(x-0) = \lim_{\varepsilon\to+0} g(x-\varepsilon)$ on ne modifie pas l'intégrale de Stieltjes $\int_0^1 f(x)\,dg(x)$ pour les fonctions continues f. On peut donc admettre que g est continue à gauche.

Remarque. On peut encore énoncer le théorème 25 sous la forme équivalente suivante :

Toute fonctionnelle linéaire continue sur $C[0, 1]$ *est de la forme*

$$F_\nu(f) = \int_0^1 f(x)\,d\nu(x),$$

où ν *est une charge borélienne sur* $[0, 1]$, *et de plus*

$$\|F_\nu\|_{C'[0,1]} = \mathrm{Var}_0^1\, \nu.$$

Sous cette forme le théorème 25 se généralise à l'espace des fonctions complexes continues (ν est remplacée par une charge complexe) et à un espace de type $C(X)$, où X est un compact métrique. La première proposition du théorème est valable pour un compact arbitraire X, mais la correspondance entre les charges et les fonctionnelles linéaires continues cesse d'être biunivoque.

3. Espaces des fonctions lisses. Soient Ω un domaine (c'est-à-dire un sous-ensemble ouvert) de $\mathbf{R}^n$, $\bar{\Omega}$, l'adhérence de Ω dans $\mathbf{R}^n$. Nous utiliserons les notations classiques suivantes : $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées dans $\mathbf{R}^n$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ est l'opérateur de dérivation partielle $\partial^l = \partial_1^{l_1} \ldots \partial_n^{l_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Par $C^r(\bar{\Omega})$ on désigne l'ensemble des fonctions sur $\bar{\Omega}$ possédant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre r sur Ω, et de plus $\partial^l f$, $|l| \leqslant r$, sont prolongeables en des fonctions continues bornées sur $\bar{\Omega}$. Définissons sur $C^r(\bar{\Omega})$ une norme par

$$\|f\|_{C^r(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |l| \leqslant r}} |\partial^l f(x)|.$$

Donc, la convergence dans $C^r(\bar{\Omega})$ équivaut à la convergence uniforme des fonctions avec leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre r compris. Il est aisé de vérifier que $C^r(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach.

Les espaces $C^r(\bar{\Omega})$ sont commodes dans les problèmes où l'on n'exige des fonctions considérées qu'une différentiabilité finie bien déterminée (c'est-à-dire l'existence d'un certain nombre de dérivées continues). Il existe néanmoins des problèmes qui font intervenir des fonctions dont l'ordre de dérivabilité est inconnu ou infini. Dans ces problèmes, il semble naturel de faire appel aux espaces de fonctions indéfiniment dérivables. Ces espaces sont localement convexes, mais, en général, ne sont pas normables et, parfois, ne sont pas métrisables.

Les plus souvent utilisés sont les trois types d'espaces suivants :

1. L'espace $\mathcal{E}(\Omega)$ est constitué de *toutes les fonctions indéfiniment dérivables* dans Ω. Une topologie dans $\mathcal{E}(\Omega)$ est définie par une famille de semi-normes p_{Kl}, où K est un compact dans Ω, $l = (l_1, \ldots, l_n)$ un multi-indice arbitraire :

$$p_{Kl}(f) = \max_{x \in K} |\partial^l f(x)|. \tag{24}$$

Théorème 26. *L'espace $\mathcal{E}(\Omega)$ est dénombrablement normable (donc métrisable) et complet.*

Démonstration. Désignons par K_m l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que : 1) la distance de x à la frontière du domaine Ω*) (c'est-à-dire les ensembles $\partial\Omega = \bar{\Omega} \backslash \Omega$) soit $\geqslant 1/m$; 2) la distance de x à 0 soit $\leqslant m$.

Il est évident que K_m est un compact, que tous ses points sont intérieurs pour K_{m+1} et que la réunion de K_m sur tous les m recouvre le domaine Ω. Définissons une semi-norme p_m sur $\mathcal{E}(\Omega)$ par $p_m(f) = \sup\limits_{\substack{x \in K_m \\ |l| \leqslant m}} |\partial^l f(x)|$.

Soit K un compact arbitraire dans Ω. La fonction $\delta(x) = d(x, \bar{\Omega} \backslash \Omega)$ est continue et positive sur K. Donc, elle atteint son minimum $\delta_0 > 0$. La fonction $\Delta(x) = d(x, 0)$ est continue sur K, donc atteint son maximum

*) Par distance à la frontière on entend comme toujours la plus petite des distances aux points de cette frontière.

Δ_0. Si l'on choisit le nombre m tel que $1/m < \delta_0$, $m > \Delta_0$, alors K_m contiendra K. Si de plus $m \geqslant |l|$, alors la semi-norme p_{ml} majore la semi-norme p_{Kl}. Nous avons montré que la famille de semi-normes $\{p_m\}$ majore la famille $\{p_{Kl}\}$. La réciproque est vraie : $p_m(f) \leqslant \sum_{l=0}^{m} p_{K_m l}(f)$.

Reste à prouver que $\mathcal{E}(\Omega)$ est complet. Soit $\{f_n\}$ une suite fondamentale. Alors $\{f_n\}$ est fondamentale pour toute semi-norme p_{ml}. D'où il résulte que la restriction de $\{f_n\}$ à K_m est une suite fondamentale dans $C^m(K_m)$. Donc, il existe une fonction $F_m \in C^m(K_m)$ telle que $f_n|_{K_m} \to F_m$ pour la métrique de $C^m(K_m)$. Il est évident que les fonctions F_m sont compatibles au sens que $F_{m+1}|_{K_m} = F_m$. Il existe donc une fonction unique f confondue avec F_m sur K_m. Par construction $p_m(f_n - f) \to 0$ pour $n \to \infty$. Donc $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ et $f_n \to f$ pour la topologie de l'espace $\mathcal{E}(\Omega)$.

Remarque. L'espace $\mathcal{E}(\Omega)$ est souvent désigné par $C^\infty(\Omega)$. Si la frontière de Ω n'est pas vide, alors $\mathcal{E}(\Omega)$ n'est pas confondu avec l'intersection de $C^k(\bar{\Omega})$. (Les fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$ ne sont pas généralement prolongeables en des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.)

2. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est composé des fonctions *à support borné* (c'est-à-dire nulles à l'extérieur d'un compact) *indéfiniment dérivables* sur Ω. On appelle *support* d'une fonction φ l'adhérence de l'ensemble des points, où φ est différente de 0. Le support de φ est désigné par supp φ. Donc, $\mathcal{D}(\Omega)$ est constitué des $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ pour lesquelles supp φ est un compact. On vérifie immédiatement que $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et, par suite, n'est pas complet pour la topologie de $\mathcal{E}(\Omega)$.

Soit K un compact dans Ω. Désignons par $\mathcal{D}_K(\Omega)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(\Omega)$ composé des φ telles que supp $\varphi \subset K$. Alors $\mathcal{D}_K(\Omega)$ muni de la topologie héritée de $\mathcal{E}(\Omega)$ sera un espace dénombrablement normé complet (comparer avec l'exercice 463). Définissons maintenant dans $\mathcal{D}(\Omega)$ une topologie plus forte que celle héritée de $\mathcal{E}(\Omega)$. De façon plus exacte, on admettra qu'un ensemble convexe $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est ouvert (resp. fermé) si son intersection avec $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est ouverte (resp. fermée) pour tout compact $K \subset \Omega$.

La topologie ainsi obtenue peut être également définie à l'aide d'une famille de semi-normes. Soit $\{K_m\}$ le système de compacts construit dans la démonstration du théorème 26. Désignons par α une suite $\{N_m\}$ d'entiers non négatifs et posons

$$p_\alpha(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m \cdot \sup_{\substack{x \in K_m \setminus K_{m-1} \\ |l| \leqslant N_m}} |\partial^l \varphi(x)| \tag{25}$$

(K_0 est un ensemble vide). Signalons que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la série du second membre de (25) ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que le système (non dénombrable) de semi-normes ainsi introduit définit la topologie décrite plus haut.

Théorème 27. *Une suite* $\{\varphi_n\}$ *converge vers* φ *dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ *si et seulement si*
1) $\varphi_n \to \varphi$ *au sens de* $\mathcal{E}(\Omega)$;
2) *toutes les fonctions* φ_n (donc φ) *appartiennent au sous-espace* $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Démonstration. La suffisance des conditions 1) et 2) est évidente au même titre que la nécessité de la condition 1). Prouvons que la condition 2) est nécessaire. Supposons que la suite $\{\varphi_n\}$ est telle que les supports de φ_n ne sont contenus dans aucun compact fixé. En rénumérotant au besoin la suite, on peut admettre que $\operatorname{supp} \varphi_m \not\subset K_m$. Soit $x_m \notin K_m$ tel que $\varphi(x_m) \neq 0$. Considérons l'ensemble V des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que $|\varphi(x_m)| < |\varphi_m(x_m)|/m$ pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ Comme tout compact $K \subset \Omega$ ne contient qu'un nombre fini de points x_m, l'intersection de V avec $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est définie par un nombre fini de conditions et, par suite, est ouverte dans $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Par conséquent, V est ouvert dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Soit p_V la fonctionnelle de Minkowski pour V. Il est immédiat que V est un ensemble convexe équilibré, donc que p_V est une semi-norme continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. La forme explicite de p_V est donnée par $p_V(\varphi) = \sup_m \left|\frac{m\varphi(x_m)}{\varphi_m(x_m)}\right|$, d'où il résulte que $p_V(\varphi_m) \geqslant m$. Donc, la suite $\{\varphi_m\}$ ne peut converger, c.q.f.d.

Théorème 28. *L'espace* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est complet, non métrisable et possède la propriété de Heine-Borel : tout sous-ensemble borné*) dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est précompact.*

Démonstration. Si la suite $\{\varphi_n\}$ est fondamentale, le raisonnement qui a servi à démontrer le théorème 27 montre que cette suite est entièrement contenue dans un sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Ce sous-espace étant complet, cette suite converge. Supposons maintenant que $\mathcal{D}(\Omega)$ est métrisable et soit $\{\varphi_m\}$ une suite telle que $\operatorname{supp} \varphi_m \not\subset K_m$. De la continuité du produit par un nombre il résulte que pour tout m on peut exhiber un nombre $\delta_m > 0$ assez petit pour que $d(0, \delta_m\varphi_m) < 1/m$. Ceci signifie que la suite $\{\delta_m\varphi_m\}$ tend vers 0, ce qui contredit le théorème 27. Donc, $\mathcal{D}(\Omega)$ est non métrisable. Supposons enfin que A est un sous-ensemble borné dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Le raisonnement précédent montre que $A \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ pour un compact $K \subset \Omega$. Comme A est borné pour chaque semi-norme p_{Kl}, toutes les fonctions de A et toutes leurs dérivées partielles vérifient les conditions du théorème d'Ascoli-Arzela. D'où il résulte que A est précompact dans $\mathcal{D}_K(\Omega)$, donc dans $\mathcal{D}(\Omega)$, c.q.f.d.

Remarque. $\mathcal{D}(\Omega)$ est souvent désigné par $C_0^\infty(\Omega)$.

3) L'espace $S(\mathbf{R}^n)$ est constitué des fonctions de $\mathbf{R}^n$ *indéfiniment différentiables et rapidement décroissantes à l'infini.* On définit une topologie sur $S(\mathbf{R}^n)$ à l'aide de la famille dénombrable de semi-normes

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{26}$$

---

*) Dans un espace semi-normé, on appelle *ensemble borné* un ensemble borné pour chaque polynorme.

où l'on a adopté les notations classiques

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$
$$\partial^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_x^{\beta_n}}.$$

(L'espace $S(\mathbf{R}^n)$ est constitué de toutes les fonctions $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ telles que $p_{\alpha,\beta}(f) < \infty$ pour tous les α et β.)

Au lieu de (26) il est parfois commode de considérer la famille

$$p'_{\alpha,\beta}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|\, dx \tag{26'}$$

ou la famille

$$p''_{\alpha,\beta}(f) = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{26''}$$

Théorème 29. *Les systèmes de semi-normes* (26), (26′) *et* (26″) *sont équivalents.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas plus suggestif où $n = 1$. On a

$$|x^k \partial^l f(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \sup_x |(x^2+1)x^k \partial^l f(x)|.$$

D'où

$$p'_{kl}(f) = \int_{\mathbf{R}} |x^k \partial^l f(x)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x |(x+1)x^k \partial^l f(x)| \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant \pi(p_{k+2,l}(f)+p_{kl}(f)).$$

De façon analogue,

$$p''_{kl}(f) = \left(\int_{\mathbf{R}} |x^k \partial^l f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sup_x (1+x^2)\, |x^k \partial^l f(x)|^2 \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2}\right)^{1/2} \leqslant (\sqrt{\pi(p^2_{k+1,l}+p^2_{kl})\,(f)}).$$

Donc les semi-normes du système (26) majorent celles des systèmes (26′) et (26″). En appliquant l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski aux fonctions

$$|x^k \partial^l f(x)|\sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

on obtient

$$p'_{kl}(f)^2 = \left(\int_{\mathbf{R}} |x^k \partial^l f(x)|\, dx\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbf{R}} |x^k \partial^l f(x)|^2 (1+x^2)\, dx \int \frac{dx}{1+x^2} = \pi(p''_{k+1,l}(f)^2+p''_{kl}(f)^2).$$

Donc, les semi-normes du système (26″) majorent celles du système (26′). Reste à estimer les semi-normes du système (26′) en fonction de celles du système (26″). Utilisons le fait que pour $f \in S(\mathbf{R})$ les fonctions $x^k \partial^l f(x)$, $\forall k$, $\forall l$, tendent vers 0 à l'infini, donc

$$x^k \partial^l f(x) = \int_{-\infty}^{x} [t^k \partial^l f(t)]' \, dt. \tag{27}$$

D'où

$$p_{kl}(f) = \sup_x |x^k \partial^l f(x)| \leqslant \int_{\mathbf{R}} |[t^k \partial^l f(t)]'| \, dt \leqslant k p'_{k-1,l}(f) + p'_{k,l+1}(f).$$

Le cas $n > 1$ n'apporte que des complications techniques : au lieu de l'égalité $\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ il faut utiliser l'inégalité $\int_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{1+\|x\|^{2n}} < \infty$, et au lieu de l'identité (27), l'identité

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \ldots \partial x_n},$$

valable pour toute fonction indéfiniment dérivable, tendant vers 0 à l'infini avec ses dérivées, c.q.f.d.

L'espace $S(\mathbf{R}^n)$ occupe une place intermédiaire entre $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ par le nombre de fonctions et la topologie. De façon plus précise, on a les inclusions continues

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \subset S(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbf{R}^n).$$

Jusqu'ici nous n'avons encore cité aucun exemple de fonction appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ou $S(\mathbf{R}^n)$. La construction de tels exemples n'est pas tout à fait triviale. Cependant on a le

Théorème 30. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $L_p(\mathbf{R}^n, dx)$*) pour $1 \leqslant p < \infty$, dans $S(\mathbf{R}^n)$ et dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. L'espace $S(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $L_p(\mathbf{R}^n, dx)$ pour $1 \leqslant p < \infty$ et dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.*

Pour éviter toute complication technique, nous effectuons la démonstration en détail uniquement pour le cas $n = 1$. Nous commençons par construire une fonction non triviale dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Lemme 1. *La fonction*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \geqslant 0, \\ e^{1/x} & \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

est indéfiniment différentiable sur la droite tout entière.

Démonstration. Ceci est vrai en tous les points $x \neq 0$. Vérifions que $\varphi^{(k)}(0) = 0$, où $k = 1, 2, \ldots$ Remarquons pour cela que la fonction $\frac{d^k}{dx^k}(e^{1/x})$ est de la forme $P_k(x) x^{-2k} e^{1/x}$, où P_k est un polynôme de degré $\leqslant k$.

*) Par dx on désigne comme toujours la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$.

(Ce qu'on établit sans peine par récurrence.) D'autre part $\lim\limits_{x \to -0} \frac{P(x)}{x^m} e^{1/x} = \lim\limits_{t \to +\infty} P\left(-\frac{1}{t}\right) t^m e^{-t} = 0$ pour tout m et tout polynôme P, ce qu'on met aisément en évidence à l'aide de la règle de L'Hospital. Donc, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi^{(k)}(\varepsilon) = 0$ pour tous les k. En appliquant encore la règle de L'Hospital, on obtient ce qu'on voulait.

Lemme 2. *La fonction*

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp[2/(x^2-1)] & \textit{pour} \quad |x| < 1, \\ 0 & \textit{pour} \quad |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

En effet, cette fonction s'annule en dehors de l'intervalle $[-1, 1]$ et est indéfiniment différentiable, puisqu'elle s'écrit sous la forme $\psi(x) = \varphi(x-1)\,\varphi(-x-1)$, où φ est la fonction du lemme 1.

Lemme 3. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *posons* $\psi_\varepsilon(x) = \frac{c}{\varepsilon}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, *où* $c^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx$.

Alors la fonction $\psi_\varepsilon(x)$ *possède les propriétés suivantes :*

1) $\psi_\varepsilon(x) \geqslant 0$;

2) $\operatorname{supp} \psi_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

La démonstration est évidente.

Nous sommes en mesure de montrer maintenant la première proposition du théorème 30 (c'est-à-dire que $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ est dense dans $L_p(\mathbf{R}, dx)$ pour $1 \leqslant p < \infty$). Soit $f \in L_p(\mathbf{R}, dx)$. L'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f|^p\,dx$ étant convergente, il existe un nombre N tel que $\int\limits_{-\infty}^{-N} |f|^p\,dx + \int\limits_{N}^{\infty} |f|^p\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Alors

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour} \quad |x| \leqslant N, \\ 0 & \text{pour} \quad |x| > N \end{cases}$$

admet un support compact et $\|f - f_N\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, $f_N(x)$ étant continue en moyenne (voir exercice 432), il existe un $\delta > 0$, tel que $\int |f_N(x) - f_N(x+t)|^p\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ pour $|t| < \delta$. Considérons la fonction

$$g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_N(x-t)\,\psi_\delta(t)\,dt.$$

(Cette intégrale existe puisque ψ_δ est bornée, de support borné, donc appartient à $L_q(\mathbf{R}, dx)$.) Evaluons la distance de f_N à g sur $L_p(\mathbf{R}, dx)$. Utilisons à cet effet la formule $\|f\|_p = \sup\limits_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int\limits_{\mathbf{R}} fh\,dx \right|$. On a

$$\|f_N - g\|_p = \sup_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_N - g) h\,dx \right| =$$

$$= \sup_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t) f_N(x-t)\,dt - f_N(x) \right) h(x)\,dx \right| =$$

$$= \sup_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t) \left(f_N(x-t) - f_N(x) \right) h(x)\,dx\,dt \right|.$$

$\left(\text{On s'est servi de l'égalité } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t)\,dt = 1.\right)$ La dernière intégrale admet la majoration suivante :

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \psi_\delta(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(f_N(x-t) - f_N(x) \right) h(x)\,dx \right) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t) \cdot \frac{\varepsilon}{2}\,dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

en vertu du choix de δ. Donc $\|f_N - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ et par suite $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Vérifions que $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Les fonctions f_N et ψ_δ étant à support borné, la fonction g l'est également : il est évident que $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} f_N + \operatorname{supp} \psi_\delta = [-N-\delta, N+\delta]$. L'indéfinie différentiabilité de g résulte de l'identité

$$\frac{d^k}{dx^k} g(x) = \frac{d^k}{dx^k} \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x-t)\,\psi_\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x-t)\,\psi_\delta^{(k)}(t)\,dt,$$

que l'on démontre facilement par récurrence. (Comparer avec le § 1, chapitre IV.)

Prouvons maintenant que $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{E}(\mathbf{R})$. Construisons à cet effet une fonction $\chi_1 \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ possédant la propriété suivante : $\chi_1(x) \equiv 1$ sur $[-1, 1]$. Pour une telle fonction on peut, par exemple, prendre la primitive de la fonction $\psi_{1/2}(x+3/2) - \psi_{1/2}(x-3/2)$ (fig. 2).

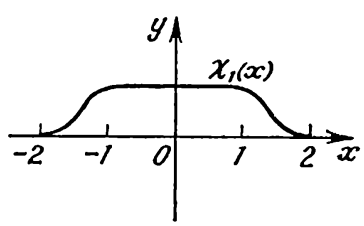


Fig. 2

Posons $\chi_N(x) = \chi_1\left(\frac{x}{N}\right)$. Alors $\chi_N(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\chi_N(x) \equiv 1$ pour $x \in [-N, N]$. Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$. Alors $\chi_N f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Vérifions que $\chi_N f \to f$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ pour $N \to \infty$. Soit K un compact sur la droite. Ce compact est alors contenu dans $[-N, N]$ pour N assez grand. Donc, $p_{kl}(\chi_N f - f) = \sup |(\chi_N f - f)^{(l)}(x)| = 0$ pour N assez grand, et, par suite, $\chi_N f \to f$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ pour $N \to \infty$.

Il apparaît que la suite $\chi_N f$ converge vers f dans l'espace $S(\mathbf{R})$. La démonstration de ce fait repose sur la majoration

$$|x^k f^{(l)}(x)| \leqslant \frac{p_{k+m,l}(f)}{N^m} \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant N, \quad f \in S(\mathbf{R}),$$

qui découle immédiatement de la définition de la norme $p_{k+m,l}$. On a

$$\begin{aligned} p_{kl}(\chi_N f - f) &= \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x^k (\chi_N f - f)^{(l)}(x) \right| = \\ &= \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \sum_{j=0}^{l} c_l^j x^k f^{(j)}(x) (\chi_N - 1)^{(l-j)}(x) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{l} c_l^j p_{k+1,j}(f) \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| (x_N - 1)^{(l-j)}(x) \right|. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant la relation

$$|(\chi_N - 1)^{(l)}(x) = \left| \frac{1}{N^l} (\chi_1 - 1)^{(l)} \left(\frac{x}{N}\right) \right| \leqslant C_l \quad \text{pour} \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad N \geqslant 1.$$

Nous obtenons alors

$$p_{kl}(\chi_N f - f) \leqslant \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{l} c_l^j p_{K+1,j}(f) C_{l-j}.$$

La dernière expression tend vers 0 pour $N \to \infty$. Les autres propositions du théorème découlent de propositions déjà démontrées.

Théorème de Weierstrass. *Soit Ω un domaine borné dans $\mathbf{R}^n$. Alors pour tout k naturel l'espace P_n des fonctions polynomiales de n variables est dense dans $C^k(\bar{\Omega})$.*

Corollaire 1. *Pour tout domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, l'espace P_n des fonctions polynomiales de n variables est dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$.*

Démonstration du corollaire. Soient données une fonction $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ et une semi-norme p_{Kk} sur $\mathcal{E}(\Omega)$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme $q \in P_n$ tel que $p_{Kk}(q - f) < \varepsilon$. Soit V un voisinage ouvert borné du compact k. La restriction de f à $\bar{V}$ appartient visiblement à $C^k(\bar{V})$. En appliquant à cette restriction le théorème de Weierstrass, on trouve un polynôme $q \in P_n$ tel que $\|q - f\|_{C^k(\bar{V})} < \varepsilon$. Comme la norme de l'espace $C^k(\bar{V})$ majore la semi-norme p_{Kk}, le polynôme q est le polynôme cherché.

Corollaire 2. *Soient Ω un domaine de $\mathbf{R}^n$, K un compact de Ω, $\varphi \in \mathcal{D}_k(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $f(x) \neq 0$ pour $x \in K$. Il existe alors une suite $\{p_k\} \subset P_n$ de polynômes telle que $p_k f \to \varphi$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Pour la démonstration il suffit de choisir $\{p_k\}$ telle que $p_k \to \frac{\varphi}{f}$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$.

La démonstration du théorème de Weierstrass sera intégralement donnée au chapitre IV (v. exercice 588), car elle fait intervenir le produit de convolution. Nous nous contenterons ici d'une démonstration simple pour le cas important où $n = 1$, $k = 0$ et où le domaine Ω est un intervalle fermé de la droite numérique. Le théorème prend la forme :

Toute fonction continue sur un intervalle fermé s'approxime uniformément par des polynômes.

Démonstration. Il est clair que toute fonction continue s'approxime par des fonctions continues linéaires par morceaux. Par ailleurs toute fonction linéaire par morceaux est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $f(x) = |x-a|$. Enfin la fonction $f(x) = |x|$ se développe sur l'intervalle $|-N, N|$ en une série convergeant uniformément de polynômes :

$$|x| = \sqrt{N^2-(N^2-x^2)} = N\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\left(1-\frac{x^2}{N^2}\right)^{k+1}\right].$$

4. Distributions. La notion de distribution apparaît de façon naturelle dans les problèmes de mathématiques et de physique mathématique lors de la généralisation de certaines opérations naturelles (dérivation, intégration, résolution d'équations différentielles, transformation de Fourier, etc.) à un domaine plus vaste que celui sur lequel ces opérations sont initialement définies. Les premiers temps ceci a conduit à des définitions paradoxales et contradictoires des distributions. La célèbre fonction de Dirac a par exemple été définie par :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

Une autre définition de cette fonction est : $\delta(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sign} x)$. Il est évident qu'il n'existe pas de fonction possédant ces propriétés.

Néanmoins toutes ces propriétés cessent d'être contradictoires si l'on comprend la distribution comme un élément de l'espace dual L', où L est un espace de fonctions « de base ». Pour L on prend le plus souvent $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ ou $S(\mathbf{R}^n)$. Les éléments des espaces $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ et $S'(\mathbf{R}^n)$ s'appellent respectivement *distributions dans le domaine Ω*, *distributions de support compact dans Ω* et *distributions à croissance modérée dans* $\mathbf{R}^n$. L'origine de ces dénominations apparaîtra plus bas.

Voyons tout d'abord comment toute fonction (pas trop mauvaise) dans Ω peut être traitée comme une distribution.

Théorème 31. *Soit f une fonction localement sommable (c'est-à-dire sommable sur chaque compact) par rapport à la mesure de Lebesgue dx dans un domaine Ω. La correspondance $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x) f(x)\,dx$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Si, de plus, f est nulle en dehors d'un compact*

$K \subset \Omega$, alors cette correspondance est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$.

Démonstration. D'après l'exercice 462 nous devons vérifier que la convergence de φ_n vers 0 sur $\mathcal{D}(\Omega)$ entraîne celle de $\int_\Omega \varphi_n(x) f(x)\, dx$ vers 0. Or, ceci découle de la définition de la convergence sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et du théorème de Lebesgue de passage à la limite sous le signe de l'intégrale. Pour démontrer la deuxième proposition il suffit de se référer au théorème 15, chapitre II.

Les distributions décrites dans le théorème 31 sont dites *régulières ;* elles correspondent aux fonctions $f(x)$ localement sommables. Il existe cependant des distributions non régulières. Par analogie au cas régulier, la valeur d'une distribution F sur une fonction de base φ est souvent notée $\int_\Omega F(x)\varphi(x)\, dx = \langle F, \varphi\rangle$. Il est entendu que cette notation ne doit pas être comprise *ad litteram :* l'intégrale correspondante diverge ou n'a pas de sens.

Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^n$ contenant l'origine des coordonnées. Définissons la *fonction de Dirac* $\delta(x)$ comme un élément de l'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$ défini par

$$\int_\Omega \delta(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ étant continûment immergé dans $\mathcal{E}(\Omega)$, toute fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{E}(\Omega)$ engendre une fonctionnelle linéaire par restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$. Du fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$, il s'ensuit que l'application naturelle de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est une injection. Des raisonnements identiques nous conduisent aux immersions continues

$$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n).$$

Autrement dit, toute distribution à support compact est une distribution à croissance modérée, et toute distribution à croissance modérée est une distribution.

Contrairement aux fonctions, les distributions ne possèdent pas de valeurs déterminées en un point (du reste les éléments des espaces $L_p(X, \mu)$ jouissent de cette propriété). Néanmoins pour une distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ l'expression « $F(x)$ est nulle dans le domaine $U \subset \Omega$ » a un sens. Par définition cette expression dit que $\langle F, \varphi\rangle = 0$ pour toutes les fonctions de base φ telles que $\operatorname{supp} \varphi \subset U$.

Soit $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dira que *$x$ n'appartient pas au support de F* si F s'annule dans un voisinage ouvert de x. Il est évident que le *support* de F est un ensemble fermé (puisque son complémentaire est ouvert, ce qui résulte immédiatement de la définition du support). Posons $U = \Omega \backslash \operatorname{supp} F$ et prouvons que F s'annule dans le domaine U. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\operatorname{supp} \varphi = K \subset U$. Tout point $x \in K$ possède un voisinage V_x dans lequel F s'annule. Du recouvrement $\{V_x\}_{x \in K}$ extrayons un sous-recouvrement $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$, et soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ la partition correspondante de l'unité (voir exercice 464). Alors $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi\varphi_i$ et $\langle F, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle F, \varphi\varphi_i\rangle = 0$. Si V est un

domaine quelconque d'annulation de F, alors tous les points de V n'appartiennent pas à supp F, donc $V \subset U$.

L'expression « distribution sur Ω de support compact » peut être comprise de deux manières :

1) comme un élément de l'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$;

2) comme un élément $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que supp F est un compact.

En fait ces deux notions sont confondues. De façon plus précise, tout élément $F \in \mathcal{E}'(\Omega)$ définit, comme signalé plus haut, un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ que nous noterons par la même lettre. On obtient ainsi exactement les éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ de support compact. Prouvons ceci.

Soit $F \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Alors F est continue pour une des semi-normes p_{Kk} qui définissent la topologie de $\mathcal{E}(\Omega)$:

$$\langle F, \varphi \rangle \leqslant c p_{Kk}(\varphi) \quad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Il est évident que la restriction de F à $\mathcal{D}(\Omega)$ s'annule sur $\Omega \backslash K$. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et supp $\varphi \subset \Omega \backslash K$, alors $p_{Kk}(\varphi) = 0$. Donc supp $F \subset K$, c'est-à-dire que F en tant qu'élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ admet un support compact. Admettons maintenant que $F \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ et supp $F = K$ est un compact dans Ω. Construisons une fonctionnelle $\tilde{F}$ sur $\mathcal{E}(\Omega)$ dont la restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ est confondue avec F. A cet effet considérons un voisinage compact V de l'ensemble K et construisons une fonction $\chi_V \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi_V(x) \equiv 1$ pour $x \in V$ (voir exercice 464). Définissons $\tilde{F}$ par $\langle \tilde{F}, f \rangle = \langle F, \chi_V f \rangle$. Cette définition a un sens, puisque $\chi_V f \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Il est clair aussi que $\tilde{F} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ (voir exercice 472a). Il reste à vérifier que $\tilde{F}\Big|_{\mathcal{D}(\Omega)} = F$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $\langle \tilde{F}, \varphi \rangle - \langle F, \varphi \rangle = \langle F, \chi_V \varphi - \varphi \rangle = 0$, puisque

$$\operatorname{supp}(\chi_V \varphi - \varphi) \subset \overline{\Omega \backslash V} \subset \Omega \backslash K.$$

Théorème 32. *Les espaces $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ et $S'(\mathbf{R}^n)$ sont $*$-faiblement complets.* (*Autrement dit, si une suite $\{F_n\}$ de distributions est telle que la suite numérique $\{\langle F_n, \varphi \rangle\}$ est fondamentale pour toute fonction de base φ, alors il existe $\lim\limits_{n \to \infty} F_n = F$ qui est une distribution du même type que F_n.*)

Démonstration. Définissons F par $\langle F, \varphi \rangle = \lim\limits_{n \to \infty} \langle F_n, \varphi \rangle$. La linéarité de F est évidente. Prouvons sa continuité. Dans le cas de $\mathcal{E}(\Omega)$ et $S(\mathbf{R}^n)$, la continuité découle du théorème de Banach-Steinhaus (cf. § 2, n° 1) puisque ces espaces sont des espaces vectoriels métriques complets (voir exercices 480 à 483). Etudions le cas $\mathcal{D}(\Omega)$. Les restrictions de F_n à $\mathcal{D}_K(\Omega)$ tendent vers un élément $F_K \in \mathcal{D}'_K(\Omega)$, puisque $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est un espace vectoriel métrique complet. Définissons maintenant la fonctionnelle $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ en la posant égale à F_K sur $\mathcal{D}'_K(\Omega)$. On vérifie sans peine que cette définition est correcte. (Si supp $\varphi \in K_1 \cap K_2$, alors $\langle F_{K_1}, \varphi \rangle = \lim\limits_{n \to \infty} \langle F_n, \varphi \rangle = \langle F_{K_2}, \varphi \rangle$.) La continuité de F résulte de l'exercice 462, c.q.f.d.

Exemple. Les distributions $(x \pm i0)^{-1}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\, dx$ converge pour $\varepsilon > 0$ et admet une limite finie pour $\varepsilon \searrow 0$ (voir exercice 499). D'après le théorème 32, cette limite est une distribution sur la droite, notée $(x \pm i0)^{-1}$.

Toute distribution de support compact dans Ω est continue pour une norme p_{Kl}. Le plus petit l pour lequel ceci a lieu s'appelle *ordre de la distribution.* Si une distribution $F \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est d'ordre l et de support K, alors elle est prolongeable en une fonctionnelle linéaire continue sur $C^l(\bar{V})$, où V est un voisinage quelconque du compact K.

On dit qu'une distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est *d'ordre* $\leqslant l$ si elle se prolonge en une fonctionnelle linéaire continue sur $C^l(\Omega)$. Les éléments de $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ne sont pas tous d'ordre fini. Cependant pour tout domaine $V \subset \Omega$ d'adhérence compacte, la restriction de F à $\mathcal{D}(V)$ est d'ordre fini.

Toute distribution à croissance modérée $F \in S'(\mathbf{R}^n)$ est continue pour l'une des semi-normes $p_{kl} = \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant l}} p_{\alpha,\beta}$ (cf. n° 3). On appelle *ordre* de F le plus petit l pour lequel ceci a lieu. Donc, toute distribution à croissance modérée admet un ordre fini. (On vérifie immédiatement que la définition de l'ordre est équivalente à celle donnée plus haut pour le cas où $\Omega = \mathbf{R}^n$ et la distribution F appartient à $S'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.)

5. Opérations sur les distributions. Nous allons montrer ici comment les principales opérations sur les fonctions (la multiplication par une fonction, la dérivation, le changement de variables) s'étendent aux distributions.

Supposons que L désigne l'un des espaces $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $S(\mathbf{R}^n)$, L' est l'espace dual, L'_0, un sous-espace dense dans L' composé des distributions régulières. Si $L = \mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{E}(\Omega)$, pour L'_0 il est commode de prendre $\mathcal{D}(\Omega)$, si $L = S(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ou $S(\mathbf{R}^n)$. Supposons que sur L'_0 est défini un opérateur linéaire A_0 et que cet opérateur est continu pour la topologie de L'. Alors A_0 est prolongeable en un opérateur continu A dans L'. Ce prolongement est unique, puisque L'_0 est dense dans L'.

Dans les cas étudiés, la continuité de l'opérateur A_0 peut être mise en évidence à l'aide du procédé suivant. Soient B un opérateur continu dans L, B' son adjoint dans L'. Si la restriction de B' à L'_0 est confondue avec A_0, alors A_0 est continu. Dans ce cas le prolongement cherché de A coïncide de toute évidence avec B'.

Particularisons le schéma général décrit.

1) *Produit par une fonction.* Supposons que $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ et prouvons que l'opérateur $M(f)$ de multiplication par f admet un prolongement continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ à $\mathcal{D}'(\Omega)$. Posons $L = \mathcal{D}(\Omega) = L'_0$, $B = M(f)$. On calcule sans peine la restriction de l'opérateur B' à L'_0. En effet soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $g \in L'_0$. Alors

$$\langle B'g, \varphi \rangle = \langle g, B\varphi \rangle = \langle g, f\varphi \rangle = \int_{\Omega} g(x) f(x) \varphi(x)\, dx.$$

Donc, l'opérateur B' agit sur l'espace L_0' comme la multiplication par la fonction f. Nous voyons que cet opérateur admet un prolongement continu (en l'occurrence B') à l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ tout entier. En désignant ce prolongement comme précédemment par $M(f)$, on obtient

$$\langle M(f)F, \varphi\rangle = \langle F, M(f)\varphi\rangle.$$

Exemple. Calculons le produit de la fonction de Dirac sur la droite par une fonction f indéfiniment différentiable. On a $\langle f\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, f\varphi\rangle = f(0)\varphi(0)$. D'où $f\delta = f(0)\delta$, ce qui confirme notre idée intuitive sur le comportement de la fonction de Dirac par une multiplication.

2) *Dérivation.* On rappelle que par ∂_j on désigne la dérivée partielle $\partial/\partial x_j$, et par ∂^k l'opérateur $\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}$. Montrons que l'opérateur ∂^k admet un prolongement continu à $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il suffit de considérer le cas de l'opérateur ∂_j. Posons $B = -\partial_j$ et calculons la restriction de B' à $\mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$\langle B'f, \varphi\rangle = \langle f, B\varphi\rangle = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,dx = \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx.$$

Donc, B' est confondu avec ∂_j sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Par suite, l'opérateur $\partial/\partial x_j$ admet un prolongement continu (en l'occurrence B') à $\mathcal{D}'(\Omega)$. La forme explicite de ce prolongement (que nous désignerons toujours par ∂_j) est

$$\langle \partial_j F, \varphi\rangle = -\langle F, \partial_j\varphi\rangle$$

et d'une façon générale pour k quelconque

$$\langle \partial^k F, \varphi\rangle = (-1)^{|k|}\langle F, \partial^k\varphi\rangle.$$

Exemple. La distribution $\partial^k\delta$ agit d'après la formule

$$\langle \partial^k\delta, \varphi\rangle = (-1)^{|k|}\,\partial^k\varphi(0).$$

Changement de variables. Soient $y = y(x)$ une application indéfiniment différentiable biunivoque d'un domaine Ω sur lui-même, $x = x(y)$ l'application réciproque. Sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est défini l'opérateur de changement de variables T: $(T\varphi)(y) = \varphi(x(y))$. Calculons l'opérateur adjoint T' sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$\langle T'f, \varphi\rangle = \langle f, T\varphi\rangle = \int_\Omega f(y)\varphi(x(y))\,dy = \int_\Omega f(y(x))\varphi(x)\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|dx.$$

Donc l'opérateur adjoint de T est le composé de l'opérateur T^{-1} et de l'opérateur $M\left(\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|\right)$ de multiplication par le module du jacobien de T. D'où il résulte que l'opérateur T admet un prolongement continu à $\mathcal{D}'(\Omega)$. Un calcul peu compliqué nous montre qu'il est défini par la formule

$$\langle TF, \varphi\rangle = \langle F, M(|J|)T^{-1}\varphi\rangle,$$

où J est le jacobien de l'application T^{-1}.

Exemple. Soit $a(x)$ une application biunivoque indéfiniment dérivable de la droite sur elle-même. Calculons la distribution $\delta(a(x))$. On a

$$\langle \delta(a(x)), \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi(b(x))\,|b'(x)| \rangle = \varphi(b(0))\,|b'(0)|,$$

où $b(x)$ est la fonction inverse de $a(x)$. En particulier on a $\delta(ax+b) = |a|^{-1}\delta_{-b/a}(x)$. (Par $\delta_b(x)$ on désigne la distribution agissant d'après la formule $\langle \delta_b, \varphi \rangle = \varphi(b)$.)

Remarque. Les opérations sur les distributions définies plus haut sont des opérateurs continus par hypothèse. Donc, elles sont permutables avec les passages à la limite. En particulier, on peut dériver terme à terme autant de fois qu'on le veut toute série convergente de distributions.

Montrons maintenant que l'ensemble des distributions à support compact s'obtient de façon naturelle à partir des distributions régulières par dérivation. De façon plus exacte, on a le

Théorème 33. *Toute distribution $F \in \mathcal{E}'(\Omega)$ peut être écrite sous la forme*

$$F = \partial^k f, \tag{28}$$

où k est un multi-indice, f une distribution régulière.

Démonstration. Pour système de semi-normes sur $\mathcal{E}(\Omega)$, définissant la topologie de cet espace, il est commode de prendre le système

$$p_{nk}(\varphi) = \int_{K_n} |\partial^k \varphi(x)|\, dx,$$

où $\{K_n\}$ est une famille de compacts recouvrant le domaine (cf. n° 3). Si une distribution K est continue pour une semi-norme p_{nK}, alors d'après le théorème de Hahn-Banach et le théorème de la forme générale des fonctionnelles linéaires sur $L_1(K_n, dx)$ il existe une fonction $f \in L_\infty(K_n, dx)$ telle que

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{K_n} \partial^k \varphi(x)\, f(x)\, dx.$$

Cette égalité se transforme en la relation (28) cherchée par substitution de $(-1)^{|k|} f$ à f.

Remarques. 1. Cette démonstration n'assure que la mesurabilité de f. En accroissant si nécessaire le multi-indice k, on peut faire en sorte que la fonction f soit continue sur Ω.

2. Si $\dim \Omega = 1$ on peut montrer qu'en dehors du support de F la fonction f est confondue avec un polynôme annulé par l'opérateur ∂^k.

3. Un raisonnement analogue nous amène au

Théorème 34. *Toute distribution à croissance modérée $F \in S'(\mathbf{R}^n)$ admet la représentation* (28), *où f est une fonction continue à croissance modérée sur $\mathbf{R}^n$.*

Le *produit direct* de distributions joue un rôle important dans la construction et l'étude des distributions dans des domaines à plusieurs dimensions.

Soient Ω_1 un domaine dans $\mathbf{R}^m$, Ω_2, un domaine dans $\mathbf{R}^n$. Posons $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbf{R}^{m+n}$. Si f_i sont des distributions régulières sur Ω_i, $i = 1, 2$, on peut définir une distribution régulière f sur Ω à l'aide de la formule $\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f_1(x)\, f_2(y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$. La fonction f s'appelle *produit direct* de

f_1 et f_2 et se note $f_1 \times f_2$. D'après le théorème de Fubini, cette intégrale peut être calculée pas à pas :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega_1} f_1(x) \left(\int_{\Omega_2} f_2(y)\, \varphi(x, y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_{\Omega_2} f_2(y) \left(\int_{\Omega_1} f_1(x)\, \varphi(x, y)\, dx \right) dy. \tag{29}$$

Cette construction est valable pour toute distribution.

Théorème 35. *Soient* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$, $i = 1, 2$. *Alors*

1) *la fonction* $\varphi_1(x) = \langle f_2, \varphi(x, \cdot) \rangle$ *appartient à* $\mathcal{D}(\Omega_1)$;

2) *la fonction* $\varphi_2(y) = \langle f_1, \varphi(\cdot, y) \rangle$ *appartient à* $\mathcal{D}(\Omega_2)$;

3) *on a* $\langle f_1, \varphi_1 \rangle = \langle f_2, \varphi_2 \rangle$;

4) *la correspondance* $\varphi \to \langle f_1, \varphi_1 \rangle = \langle f_2, \varphi_2 \rangle$ *est une fonctionnelle linéaire continue sur* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration. Montrons que la fonction φ_1 est à support borné. Soient $K \subset \Omega$ le support de la fonction φ, K_1, la projection de K sur Ω_1. Alors la fonction $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$ est identiquement nulle pour $x \notin K_1$. Donc $\varphi_1(x) = \langle f_2, \varphi_x \rangle = 0$ pour $x \notin K$, d'où supp $\varphi_1 \subset K_1$. D'autre part, l'application $x \mapsto \varphi_x$ de Ω_1 dans $\mathcal{D}(\Omega_2)$ est indéfiniment dérivable. Ceci entraîne l'indéfinie dérivabilité de φ_1. Donc $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et nous avons prouvé 1). La proposition 2) se démontre de façon analogue.

Pour démontrer 3) considérons préalablement le cas particulier où la fonction $\varphi(x, y)$ est de la forme $\psi_1(x)\psi_2(y)$. Il est alors évident que $\varphi_1(x) = \psi_1(x)\langle f_2, \psi_2 \rangle$, $\varphi_2(y) = \psi_2(y)\langle f_1, \psi_1 \rangle$. Et l'on a (29). Les combinaisons linéaires des fonctions de la forme $\psi_1(x)\, \psi_2(y)$ étant denses dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il reste à vérifier que les applications $\varphi \to \langle f_1, \varphi_1 \rangle$ et $\varphi \to \langle f_2, \varphi_2 \rangle$ sont continues pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$. Ceci résulte de la continuité immédiatement vérifiable de l'application $\varphi \to \varphi_1$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_1)$.

§ 4. Espaces hilbertiens

1. Géométrie de l'espace hilbertien. Un espace vectoriel H sur le corps $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est *préhilbertien* s'il est muni d'un *produit scalaire**), c'est-à-dire d'une application de $H \times H$ dans K, notée $(\,,\,)$ et possédant les propriétés suivantes :

1) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ (linéarité par rapport au premier argument) ;

---

*) Le terme « produit scalaire » est apparu dans le travail de Hamilton sur le corps des quaternions. Tout quaternion q se représente par la somme d'une « partie scalaire » q_0 et d'une « partie vectorielle » $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$. De là le produit de deux quaternions vectoriels $\vec{q}$ et $\vec{r}$ est la somme du produit scalaire $(\vec{q}, \vec{r})$ et du produit vectoriel $[\vec{q}, \vec{r}]$. Certains auteurs désignent le « produit scalaire » par « produit intérieur ».

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ *(hermicité ;* la barre désigne la conjugaison complexe) ;
3) $(x, x) \geqslant 0$ (semi-définition positive).
Un espace préhilbertien H est *hilbertien* si l'on a de plus.
3') $(x, x) > 0$ pour $x \neq 0$;
4) H est complet pour la topologie définie par la norme $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.

(On établira ultérieurement que ceci est bien une norme.)

L'une des plus importantes conséquences des propriétés du produit scalaire est l'

Inégalité de Cauchy-Bouniakovski:

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

Démonstration. Supposons d'abord que (x, y) est un nombre réel. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a

$$0 \leqslant (x+ty, x+ty) = (x, x)+2t(x, y)+t^2(y, y).$$

Donc, ce trinôme du second degré (en t) possède un discriminant $\leqslant 0$: $(x, y)^2-(x, x)\cdot(y, y) \leqslant 0$, c.q.f.d. On obtient la généralisation du cas étudié par multiplication du vecteur x (ou y) par un nombre complexe convenable de module égal à 1. Ceci étant (x, y) devient réel sans changer de valeur absolue ; (x, x) et (y, y) ne varient pas non plus.

Corollaire. *La quantité* $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ *possède les propriétés d'une semi-norme (et même d'une norme si est satisfaite la condition* 3'*)).*

En effet,

$$||x+y||^2 = (x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y) \leqslant (x, x)+2\,|(x,y)|+(y,y) \leqslant$$
$$\leqslant (x,x)+2\sqrt{(x, x)\cdot(y, y)}+(y, y) = (||x||+||y||)^2.$$

Tout espace préhilbertien L peut être transformé en espace hilbertien $\tilde{L}$ à l'aide de la construction suivante. Soit $L_0 \subset L$ le sous-ensemble des vecteurs x pour lesquels $(x, x) = 0$. L'inégalité de Cauchy-Bouniakovski nous dit que L_0 est un sous-espace de L. On définit de façon naturelle le produit scalaire sur l'espace quotient L/L_0 : si $\bar{x}, \bar{y} \in L/L_0$, et $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ sont des représentants des classes $\bar{x}$ et $\bar{y}$, on convient alors que $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$. On laisse au lecteur le soin de s'assurer que cette définition est correcte et que le produit scalaire obtenu jouit de la propriété 3'). Si d'autre part L/L_0 n'est pas complet, on désignera par $\tilde{L}$ sa complétion pour la norme $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. L'inégalité de Cauchy-Bouniakovski nous apprend que le produit scalaire est continu pour cette norme, donc prolongeable à $\tilde{L}$. Nous sautons la vérification des propriétés 1), 2), 3) pour le produit scalaire prolongé.

Exemples. 1) Soit L l'espace des suites à support borné finies $\{x_n\}$ de nombres de K muni du produit scalaire $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n$. Dans ce cas $L_0 = \{0\}$, $\tilde{L} = l_2(K)$.

2) Sur $L = C[a, b]$ le produit scalaire est défini par la formule $(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Dans ce cas $L_0 = \{0\}$, $\tilde{L} = L_2[a, b]$.

3) Sur L, espace des fonctions en escalier mesurables sur un ensemble X de mesure μ, le produit scalaire est de la forme $(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu$. Dans ce cas L_0 est composé de fonctions presque partout nulles pour la mesure μ, $\tilde{L} = L_2(X, \mu)$.

4) Sur L, espace des polynômes en la variable complexe z, le produit scalaire est défini par

$$(P, Q) = \iint_{|z| \leq 1} P(z)\overline{Q(z)}\,dx\,dy, \qquad z = x+iy,$$

ici $L_0 = \{0\}$, $\tilde{L}$ est confondu avec l'ensemble $A^2(D)$ des fonctions de $L_2(D, dx\,dy)$ analytiques sur le disque unité D (voir exercice 533).

Dans un espace hilbertien réel, on peut définir *l'angle* $\varphi \in [0, \pi]$ entre des vecteurs x et y par

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

En particulier si $(x, y) = 0$, alors $\varphi = \pi/2$. On dit alors que x et y sont *orthogonaux* et l'on note $x \perp y$.

Dans un espace hilbertien complexe, la notion d'angle n'a pas de sens mais celle d'orthogonalité reste en vigueur. Si S est un sous-ensemble arbitraire dans un espace hilbertien H, on désigne par $S^\perp$ l'*orthocomplément* de S, c'est-à-dire l'ensemble de tous les vecteurs $x \in H$ orthogonaux à tous les vecteurs $y \in S$. Il est évident que $S^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel fermé de H.

Le théorème suivant décrit une propriété géométrique fondamentale de l'espace hilbertien.

Théorème 36. *Si K est un sous-ensemble fermé convexe non vide dans un espace hilbertien H, alors pour tout point $x \in H$ il existe un point unique $y \in K$ qui est le plus proche de x.*

Démonstration. Soit $d = \inf_{y \in K} d(x, y)$, où $d(x, y)$ est la distance engendrée par la norme $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, et $\{y_n\}$ une suite de points de K telle que $\lim_{n \to \infty} d(x, y_n) = d$. Prouvons que $\{y_n\}$ est une suite fondamentale. Nous aurons besoin pour cela de l'*identité du parallélogramme*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2+2\,\|y\|^2, \tag{30}$$

valable dans tout espace préhilbertien (voir exercice 547). En appliquant cette identité au parallélogramme de côtés $x-y_n$ et $x-y_m$, on obtient

$$\|y_n-y_m\|^2 = 2\,\|x-y_n\|^2+2\,\|x-y_m\|^2-\|2x-y_n-y_m\|^2.$$

On remarquera maintenant que $||2x-y_n-y_m||^2 = 4\left\| x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \geqslant 4d^2$, puisque $\frac{y_n+y_m}{2} \in K$. Si n et m sont assez grands, alors $||x-y_n||^2 \leqslant d^2+\varepsilon$, $||x-y_m||^2 \leqslant d^2+\varepsilon$, d'où $||y_n-y_m||^2 < 4(d^2+\varepsilon)-4d^2 = 4\varepsilon$.

Nous avons montré que $\{y_n\}$ est fondamentale. Supposons que $y = \lim y_n$. Alors $d(x, y) = \lim d(x, y_n) = d$. Que ce point soit unique résulte de l'identité du parallélogramme : si $d(x, y) = d(x, y') = d$, alors $||y-y'||^2 = 2\,||x-y||^2+2\,||x-y'||^2-||2x-y-y'||^2 \leqslant 4d^2-4d^2 = 0$, c.q.f.d.

Remarque. L'hypothèse de la réciproque savoir que si dans un espace hilbertien un ensemble K est tel que pour tout point $x \in H$ il existe un point unique $y \in K$ qui est le plus proche de x, alors K est fermé et convexe, a été avancée depuis longtemps, mais elle n'a été ni prouvée ni réfutée.

Théorème 37. *Soient H un espace hilbertien, H_1 un sous-espace fermé de H, $H_2 = H_1^{\perp}$. Alors H est la somme directe de H_1 et H_2.*

Démonstration. Soit $x \in H$ et supposons que x_1 est le point de H_1 le plus proche de x. Posons $x_2 = x-x_1$ et prouvons que $x_2 \in H_2$. En effet, supposons que $y \in H_1$; nous savons que la fonction $f(t) = ||x-x_1+ty||^2$ de la variable réelle t présente un minimum en $t = 0$. Donc $f'(0) = 0$. Or,

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{||x_2+ty||^2-||x_2||^2}{t} = (x_2, y)+(y, x_2) = 2\,\mathrm{Re}\,(x_2, y).$$

Donc $\mathrm{Re}\,(x_2, y) = 0$. En remplaçant y par iy il vient $\mathrm{Im}\,(x_2, y) = 0$. Donc $(x_2, y) = 0$, c'est-à-dire $x_2 \in H_2$. Nous avons montré que H est la somme de H_1 et H_2. Que cette somme soit directe résulte de l'orthogonalité de H_1 et H_2 ; si $x \in H_1 \cap H_2$, alors $(x, x) = 0$, c'est-à-dire que $x = 0$. Le fait que H est somme directe de deux sous-espaces orthogonaux H_1 et H_2 est noté par la formule $H = H_1 \oplus H_2$.

Théorème 38. *Toute fonctionnelle linéaire continue f sur un espace hilbertien est de la forme $f(x) = (x, y)$ pour $y \in H$.*

Démonstration. Soit $H_1 = \ker f$ l'ensemble de tous les vecteurs annulant f. Si $H_1 = H$, alors $f \equiv 0$ et l'on peut poser $y = 0$. Si $H_1 \neq H$, on posera $H_2 = H_1^{\perp}$. Le théorème 37 nous dit que $H = H_1 \oplus H_2$. Prouvons que H_2 est de dimension 1. Soit y_0 un vecteur non nul de H_2. Alors $f(y_0) \neq 0$, puisque, le cas échéant, y_0 appartiendrait à H_1. Pour tout $y_1 \in H_2$ le vecteur $y_1-\frac{f(y_1)}{f(y_0)}\,y_0$ appartient à $H_1 \cap H_2$ et par suite est nul. Ceci prouve que $\{y_0\}$ est une base de H_2. Posons maintenant $y = \frac{f(y_0)}{(y_0, y_0)}\,y_0$ et comparons la fonctionnelle f à la fonctionnelle $x \mapsto (x, y)$. Ces deux fonctionnelles sont nulles sur H_1 et prennent la valeur $f(y_0)$ sur y_0. Donc elles sont partout confondues.

Remarque. Les théorèmes 36, 37 et 38 sont mis en défaut dans un espace préhilbertien (voir exercice 544).

On dit qu'un système de vecteurs $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dans un espace préhilbertien est *orthonormé* si

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{pour} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Inégalité de Bessel. *Pour tout système orthonormé* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *et tout vecteur* x *on a*

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, x_\alpha)|^2 \leqslant (x, x). \tag{31}$$

(La somme de gauche est comprise comme $\sup\limits_{A_0} \sum\limits_{A_0} |(x, x_\alpha)|^2$, où la borne supérieure est prise sur tous les sous-ensembles finis $A_0 \subset A$. On démontre sans peine que cette somme ne peut être finie que dans le cas où seul un ensemble au plus dénombrable de termes sont différents de 0.)

Démonstration. Par définition de la somme du premier membre de (31) il suffit de vérifier cette inégalité pour un ensemble finie A. Soient H_1 le sous-espace de H engendré par le système $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$, $H_2 = H_1^\perp$. Alors $x = \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha x_\alpha + y$, où $y \in H_2$. Le système $\{x_\alpha\}$ étant orthonormal et H_1 et H_2 orthogonaux, il vient

$$(x, x_\alpha) = c_\alpha, \qquad (x, x) = \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2 + (y, y),$$

d'où résulte immédiatement (31).

Dans un espace hilbertien H un système orthonormé $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est dit *complet* si son orthocomplément est constitué de 0.

Egalité de Parseval (généralisation du théorème de Pythagore). *Pour tout système orthonormé complet* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *et tout vecteur* x *on a*

$$(x, x) = \sum_{\alpha \in A} |(x, x_\alpha)|^2. \tag{32}$$

Démonstration. Soit A_0 l'ensemble des indices pour lesquels $(x, x_\alpha) \neq 0$. Comme indiqué plus haut, l'ensemble A_0 est dénombrable. Indexons-le et écrivons $x_1, x_2, \ldots$ au lieu de $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots$ et $c_1, c_2, \ldots$ au lieu de $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \ldots$ Considérons la suite des sommes $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$. La suite $\{S_n\}$ est fondamentale, puisque $||S_{n+k} - S_n||^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{n+k} |c_i|^2$, et que la série $\sum\limits_i |c_i|^2$ converge. Soient $S = \lim S_n$ et $y = x - S$. Montrons qu'en réalité $y = 0$. Pour cela il suffit de vérifier que y est orthogonal au système $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Pour $\alpha \notin A_0$ ceci est évident par construction ; pour $\alpha \in A_0$ ceci résulte de l'égalité

$$(y, x_i) = (x - S, x_i) = \lim_{n \to \infty} (x - S_n, x_i) = 0.$$

Donc $y = 0$ et par suite $x = S$, d'où

$$(x, x) = \lim_{n \to \infty} (S_n, S_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2.$$

Nous avons incidemment démontré le

Théorème 39. *Dans un espace hilbertien H tout système orthonormal complet $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une base hilbertienne au sens que tout vecteur $x \in H$ se représente de façon unique par*

$$x = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha x_\alpha, \quad \text{où} \quad c_\alpha = (x, x_\alpha).$$

Remarque. La notion de base hilbertienne est différente de celle de base dans un espace vectoriel et n'est confondue avec elle que si la dimension de l'espace est finie. La différence est faite par l'existence de combinaisons linéaires infinies qui n'ont pas de sens dans une situation purement algébrique.

Théorème 40. *Tout espace hilbertien admet une base hilbertienne. Toutes les bases d'un espace donné H sont équipotentes. (Cette puissance s'appelle dimension hilbertienne de H.)*

Démonstration. En utilisant le lemme de Zorn on démontre immédiatement l'existence d'un système orthonormé maximal dans H. Si ce système n'était pas complet, en lui ajoutant un vecteur unité de son orthocomplément, on obtiendrait une contradiction avec sa maximalité. Donc, un système maximal est complet et d'après le théorème 39 est une base hilbertienne dans H.

L'équipotence de deux bases dans un espace de dimension finie résulte d'un fait algébrique analogue : dans ce cas les notions de base et de base hilbertienne sont confondues.

Supposons maintenant que H possède une base dénombrable $\{x_n\}_{n \in N}$. Alors H est de dimension infinie (puisque x_n sont indépendants) et séparable (c'est-à-dire possède un sous-ensemble dénombrable partout dense ; tel est, par exemple, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies des vecteurs de base à coefficients rationnels). Tout autre base $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ contient un nombre infini d'éléments. Si A était non dénombrable, alors H contiendrait un ensemble non dénombrable de boules disjointes de rayon 1 (il suffit de prendre les boules centrées en $2y_\alpha$, $\alpha \in A$), ce qui contredit la séparabilité de H.

Nous sautons le cas d'un espace de dimension non dénombrable car il implique une incursion dans la théorie des ensembles.

On peut démontrer l'existence d'une base dans un espace hilbertien séparable sans faire appel au lemme de Zorn à l'aide du processus *d'orthogonalisation.*

Soit $\{x_n\}_{n \in N}$ un système dénombrable de vecteurs dans H dont l'orthocomplément n'est composé que de 0 (par exemple est une famille de vecteurs dense dans H dont l'existence est assurée par la séparabilité de H). En éliminant les vecteurs « excédentaires » on peut admettre que x_n sont

linéairement indépendants. Définissons maintenant de nouvelles suites de vecteurs $\{y_n\}_{n \in N}$, $\{z_n\}_{n \in N}$:

$$y_1 = x_1, \qquad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|},$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1, \qquad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, z_i)z_i, \qquad z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il est aisé de voir que le système $\{z_n\}$ est orthonormé et que l'enveloppe linéaire de $z_1, \ldots, z_n$ est confondue avec celle de $x_1, \ldots, x_n$. Donc $\{z_n\}_{n \in N}$ est une base de H. On remarquera que si le système initial $\{x_n\}$ est contenu dans un sous-espace (non fermé) H_0 de H, alors le système $\{z_n\}$ l'est aussi. De là, en particulier, il résulte que tout espace préhilbertien séparable possède une base.

Théorème 41. *Deux espaces hilbertiens sont isomorphes si et seulement s'ils possèdent la même dimension hilbertienne.*

Démonstration. La nécessité de la condition est évidente. Prouvons la suffisance. Supposons que H_1 et H_2 sont de même dimension. Ceci signifie que H_1 et H_2 contiennent des bases $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ équipotentes. Définissons un opérateur $U : H_1 \to H_2$ par la formule $U\left(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha x_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha y_\alpha$. L'égalité de Parseval nous dit que cet opérateur est isométrique, c'est-à-dire préserve le produit scalaire, donc applique H_1 dans un sous-espace complet L de H_2. Comme L contient la base $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$, il vient $L^\perp = \{0\}$. Donc $L = H_2$, c.q.f.d.

Corollaire. *Tous les espaces hilbertiens séparables de dimension infinie sont isomorphes.*

2. Opérateurs dans l'espace hilbertien. Nous avons vu au n° 1 que toute fonctionnelle linéaire continue sur un espace hilbertien H pouvait être représentée par un produit scalaire. De là il résulte qu'on peut naturellement identifier l'espace hilbertien réel H avec son dual H'. A un vecteur y est associé la fonctionnelle $f_y(x) = (x, y)$. Pour un espace hilbertien complexe cette correspondance est un antiisomorphisme, car f_y dépend *antilinéairement* de y : $f_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2} = \bar{\lambda}_1 f_{y_1} + \bar{\lambda}_2 f_{y_2}$. Considérons l'espace H^* *antidual* de H, c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles antilinéaires continues sur H. Les espaces H et H^* s'identifient naturellement : à un vecteur $x \in H$ est associée une fonctionnelle antilinéaire $f_x^*(y) = (x, y)$.

Si H_1 et H_2 sont des espaces hilbertiens, A, un opérateur linéaire de H_1 dans H_2, alors on peut définir l'opérateur adjoint hermitien A^* de $H_2^* = H_2$ dans $H_1^* = H_1$ par la formule

$$(A^* x_2, x_1) = (x_2, Ax_1), \qquad x_i \in H_i.$$

La correspondance $A \mapsto A^*$ possède les propriétés suivantes :

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^* = \bar{\lambda}_1 A_1^* + \bar{\lambda}_2 A_2^* \ ; \qquad (AB)^* = B^* A^* \ ; \qquad (A^*)^* = A.$$

Les opérateurs adjoints hermitiens sont souvent appelés simplement adjoints, ce que nous ferons aussi, mais en conservant une différence dans la notation : par A' on désignera l'opérateur adjoint et par A^* l'opérateur hermitien adjoint.

Distinguons les classes d'opérateurs suivantes.

Les opérateurs *autoadjoints* (ou *hermitiens*) A sont caractérisés par la propriété $A^* = A$.

Les opérateurs *unitaires* sont caractérisés par la propriété $U^* = U^{-1}$. (Ceci équivaut aux conditions $U^*U = 1 = UU^*$. En dimension finie il suffit de l'une de ces deux égalités.)

Les opérateurs *normaux* N jouissent de la propriété $NN^* = N^*N$.

Les *orthoprojecteurs* P possèdent les propriétés : $P^* = P = P^2$ (voir exercice 554).

Les opérateurs *positifs* A sont tels que $(Ax, x) \geqslant 0$ pour tous les $x \in H$. Cette propriété s'écrit : $A \gg 0$. Dans l'ensemble End H on introduit l'ordre partiel : $A \gg B$ si $A - B \gg 0$.

Exemples. 1) L'opérateur A de multiplication par une fonction $a \in L_\infty(X, \mu)$, définit sur l'espace $L_2(X, \mu)$, est autoadjoint si $a(x)$ est presque partout réelle, et unitaire si $|a(x)| = 1$ presque partout. Cet opérateur, qui est normal pour toute fonction a, est un orthoprojecteur si a prend presque partout les valeurs 0 ou 1, positif, si $a \geqslant 0$ presque partout.

2) L'opérateur T de translation unilatérale dans $l_2(\mathbf{R})$ agissant d'après la formule $T\{x_n\} = \{x_{n+1}\}$ est tel que $TT^* = 1$, mais n'est pas unitaire, car $T^*T = 1 - P_1$, où P_1 est un projecteur sur le sous-espace engendré par le premier vecteur de base.

3) Soit A un opérateur intégral sur $L_2(X, \mu)$ de noyau $K(x_1, x_2)$, c'est-à-dire $Af(x_1) = \int\limits_X K(x_1, x_2) f(x_2)\, d\mu(x_2)$. Calculons l'opérateur adjoint A^*. L'égalité fondamentale $(Af, g) = (f, A^*g)$ s'écrit ici

$$\int\limits_X \int\limits_X K(x_1, x_2) f(x_2) \overline{g(x_1)}\, d\mu(x_1)\, d\mu(x_2) = \int\limits_X f(x) \overline{(A^*g)(x)}\, d\mu(x),$$

d'où $(A^*g)(x) = \int\limits_X \overline{K(x_1, x)}\, g(x_1) d\mu(x_1)$. Donc A^* est également un opérateur intégral de noyau $K^*(x_1, x_2) = \overline{K(x_2, x_1)}$.

A noter que dans le cas particulier où X est constitué d'un nombre fini de points de mesure 1, on obtient une relation classique d'algèbre linéaire entre les éléments de la matrice A et ceux de sa transposée conjuguée A^* : $a_{ik}^* = \bar{a}_{ki}$.

Théorème 42. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire A d'un hilbertien H_1 dans un espace hilbertien H_2 soit compact est qu'il soit uniformément approximable par des opérateurs de rang fini.*

Démonstration. La suffisance de cette condition est valable dans tout espace de Banach et a été établie plus haut (voir théorème 15). Démontrons la nécessité. Soient $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, B_1, la boule unité de H_1. Alors AB_1 est un ensemble précompact dans H_2. Prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque et soient $y_1, \ldots, y_N$ un ε-réseau fini pour AB_1, H_0 l'enveloppe linéaire de $y_1, \ldots, y_N$ et P_0 un orthoprojecteur de H_0 dans H_2. Il est évident que P_0A est un opérateur de rang fini, puisque $\operatorname{im} P_0A \subset \operatorname{im} P_0 = H_0$. D'autre part,

$$||A-P_0A|| = \sup_{x \in B_1} ||Ax-P_0Ax|| = \sup_{y \in AB_1} ||y-P_0y|| \leqslant \varepsilon,$$

puisque

$$||y-P_0y|| = ||y-y_i-P_0(y-y_i)|| = ||(1-P_0)(y-y_i)|| \leqslant ||y-y_i||.$$

(La dernière expression résulte de ce que $1-P_0$, de même que P_0, est un orthoprojecteur, donc est de norme 1), c.q.f.d.

A tout opérateur hermitien A dans un espace hilbertien est associée une *forme hermitienne* (resp. *quadratique* dans un espace réel) $Q_A(x) = (Ax, x)$.

Théorème 43. *Pour tout opérateur hermitien A, on a* $\sup_{||x||=1} |Q_A(x)| = ||A||$; *si la borne supérieure est atteinte en x_0, alors x_0 est un vecteur propre de A associé aux valeurs propres* $\pm ||A||$.

Démonstration. Il est évident que $|Q_A(x)| = |(Ax, x)| \leqslant ||Ax||\,||x|| \leqslant ||A||$ pour $||x|| = 1$. Pour obtenir la majoration inverse, on utilisera l'identité $Q_A(x+y)-Q_A(x-y) = 4\operatorname{Re}(Ax, y)$, qui se déduit facilement de la définition de Q_A. Soit $\sup_{||x||=1} |Q_A(x)| = c$. De l'identité indiquée il vient

$$4\operatorname{Re}(Ax, y) \leqslant c\,||x+y||^2+c\,||x-y||^2$$

ou en vertu de l'identité du parallélogramme

$$2\operatorname{Re}(Ax, y) \leqslant c\,||x||^2+c\,||y||^2.$$

Posons $y = \frac{||x||}{||Ax||} Ax$. On obtient alors $2\,||x||\,||Ax|| \leqslant 2c\,||x||^2$ ou $||Ax|| \leqslant c\,||x||$, c.q.f.d. Une autre démonstration est accessible dans l'exercice 556.

Supposons maintenant que $\sup |Q_A(x)|$ est réalisé en x_0. Désignons par z un vecteur unité quelconque orthogonal à x_0. Le vecteur $x_t = x_0 \cos t + z \sin t$ est confondu avec x_0 pour $t = 0$ et possède une longueur égale à un pour t quelconque. Donc, $Q_A(x_t)$ présente un extrémum pour $t = 0$. Donc, $\frac{d}{dt} Q_A(x_t)\Big|_{t=0} = 0$. Le calcul de cette dérivée nous donne $2\operatorname{Re}(Ax_0, z) = 0$. En substituant iz à z on voit que $(Ax_0, z) = 0$. Donc $Ax_0 \in (\{x_0\}^\perp)^\perp$, c'est-à-dire $Ax_0 = \lambda x_0$. En définitive $\lambda = (\lambda x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) = \pm ||A||$, c.q.f.d.

Théorème 44. *Si un sous-espace H_1 de H est invariant par un opérateur hermitien A, son orthocomplément $H_2 = H_1^\perp$ l'est également par A.*

Démonstration. Soient $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$. Prouvons que $Ax_2 \perp x_1$. Ceci découle de l'égalité $(Ax_2, x_1) = (x_2, Ax_1)$. Donc $AH_2 \subset H_2$.

Théorème 45 (Hilbert). *Soit A un opérateur hermitien compact dans un espace hilbertien H. Il existe une base orthonormée $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ constituée des vecteurs propres de l'opérateur A. Les valeurs propres correspondantes $\{\lambda_\beta\}$ sont réelles et pour tout $\varepsilon > 0$ seul un nombre fini d'entre elles sont situées dans le domaine $|\lambda| > \varepsilon$.*

Démonstration. Le lemme de Zorn nous permet d'établir sans peine l'existence d'un système orthonormé maximal constitué des vecteurs propres de l'opérateur A. Montrons que ce système est une base dans H. Si cela n'est pas le cas, supposons que H_0 est l'orthocomplément de ce système. Le théorème 44 nous dit que H_0 est invariant par A. La restriction A_0 de l'opérateur A à H_0 est un opérateur hermitien compact ne possédant aucun vecteur propre (puisque le système initial est maximal). Montrons que ceci est en contradiction avec le théorème 43. En effet, A_0 étant compact, il vient que Q_{A_0} est continu pour la topologie faible sur la boule unité B_1. De façon plus précise, si $x_n \rightharpoonup x$, alors

$$Q_{A_0}(x_n)-Q_{A_0}(x) = (A_0x_n, x_n)-(A_0x, x) = (A_0(x_n-x), x_n)+(Ax, x_n-x).$$

Le premier terme du premier membre tend fortement vers 0, puisque A_0 est compact, le deuxième est borné, puisque $x_n \in B_1$. Donc le premier terme tend vers 0. Dans le second terme, le premier facteur est fixé, le second tend faiblement vers 0. Donc, le second membre tend vers 0. Donc Q_A est une fonction continue sur B_1. La boule B_1 étant compacte pour la topologie faible, la fonction $|Q_A|$ atteint sur B_1 son maximum en un point $x_0 \in B_1$. D'après le théorème 43 x_0 est vecteur propre pour A, d'où la contradiction annoncée. La réalité des valeurs propres résulte des relations $\lambda_\beta = (Ax_\beta, x_\beta) = (x_\beta, Ax_\beta) = \bar{\lambda}_\beta$.

Prouvons la dernière proposition du théorème. Soient $B_\varepsilon \subset B$ l'ensemble des indices β pour lesquels $|\lambda_\beta| > \varepsilon$, H_ε, le sous-espace engendré par $\{x_\beta\}_{\beta \in B_\varepsilon}$. L'ensemble H_ε est invariant par A. Désignons par A_ε la restriction de A à H_ε. Alors A_ε est un opérateur compact inversible, ce qui est possible seulement si H_ε est de dimension finie, donc B_ε est de dimension finie, c.q.f.d.

Remarque. La démonstration du théorème de Hilbert a un caractère de construction : en effet, on trouve successivement les valeurs propres de l'opérateur A dans l'ordre de décroissance de leurs modules en utilisant les théorèmes 43 et 44.

Il se trouve que la valeur propre maximale (en module) de l'opérateur hermitien A n'est pas la seule à avoir une signification variationnelle. On a le

Théorème de Courant. *Soit A un opérateur hermitien compact dans un espace hilbertien H. Supposons que ses valeurs propres non nulles sont indexées compte tenu de leur multiplicité de telle sorte que soient réalisées les inégalités*

$$\lambda_{-1} \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \ldots < 0 < \ldots \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_1,$$

alors

$$\lambda_n = \inf_{H_{n-1}} \sup_{x \perp H_{n-1}} \frac{Q_A(x)}{\|x\|^2}, \quad \lambda_{-n} = \sup_{H_{n-1}} \inf_{x \perp H_{n-1}} \frac{Q_A(x)}{\|x\|^2},$$

où H_{n-1} parcourt tous les sous-espaces de dimension $(n-1)$ de H.

Démonstration. La deuxième égalité résulte de la première par substitution de $-A$ à A. Prouvons la première. Soit $\mathring{H}_{n-1}$ l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Alors dans $\mathring{H}_{n-1}^{\perp}$, la valeur propre maximale est λ_n, donc $\sup\limits_{x \perp \mathring{H}_{n-1}} \frac{Q_A(x)}{\|x\|} = \lambda_n$. D'autre part, pour tout sous-espace H_{n-1} de dimension $(n-1)$ l'espace $H_{n-1}^{\perp}$ possède une intersection non vide avec l'espace engendré par $x_1, \ldots, x_n$. Soit

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \in H_{n-1}^{\perp}.$$

alors

$$\frac{Q_A(x)}{\|x\|^2} = \frac{\sum |c_k|^2 \lambda_k}{\sum |c_k|^2} \geqslant \lambda_n, \quad \text{i.e.} \quad \sup_{x \perp H_{n-1}} \frac{Q_A(x)}{\|x\|^2} \geqslant \lambda_n,$$

c.q.f.d.

Une conséquence de ce théorème est le principe d'interposition*) utile dans les applications (voir exercice 566).

*) En anglais *between principle (Note du traducteur.)*

CHAPITRE 4

TRANSFORMATION DE FOURIER ET ÉLÉMENTS D'ANALYSE HARMONIQUE

§ 1. Produits de convolution sur un groupe commutatif

1. Produits de convolution des fonctions de base. Soient G un groupe fini, K un corps. Désignons par $K[G]$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles des éléments du groupe G à coefficients de K. Les éléments de $K[G]$ sont de la forme

$$x = \sum_{g \in G} a(g)g, \quad \text{où} \quad a(g) \in K. \tag{1}$$

Sur l'ensemble $K[G]$ on introduit de façon naturelle une structure d'algèbre sur le corps K :

$$\begin{gathered} \lambda\left(\sum_{g \in G} a(g)g\right) = \sum_{g \in G} \lambda a(g)g, \\ \sum_{g \in G} a(g)g + \sum_{g \in G} b(g)g = \sum_{g \in G} (a(g)+b(g))g, \\ \left(\sum_{g \in G} a(g)g\right)\left(\sum_{g \in G} b(g)g\right) = \sum_{\substack{g_1 \in G \\ g_2 \in G}} a(g_1)\, b(g_2) g_1 g_2. \end{gathered} \tag{2}$$

Il est commode d'identifier un élément $x \in K[G]$, défini par (1), avec une fonction $a(g)$ sur le groupe G à valeurs dans K. Dans cette interprétation, la multiplication par un nombre et l'addition dans $K[G]$ sont des opérations ordinaires sur des fonctions. La multiplication se distingue toutefois de la multiplication (ponctuelle) ordinaire. On l'appelle *convolution* et on la désigne par $*$. Son expression est

$$(a * b)(g) = \sum_{h \in G} a(gh^{-1})\, b(h) = \sum_{h \in G} a(h)\, b(h^{-1}g) = \sum_{g_1 g_2 = g} a(g_1)\, b(g_2). \tag{3}$$

L'ensemble $K[G]$ muni des opérations définies plus haut s'appelle *algèbre de groupe*. Cette algèbre apparaît naturellement comme un objet universel dans une catégorie convenable (voir problème 579) et joue un rôle important dans la théorie des représentations des groupes.

Dans la suite, on s'intéressera en principe aux groupes infinis G munis d'une mesure μ. Dans ce cas il convient de remplacer la sommation par

une intégration dans la formule (3). De façon plus précise, nous supposons que G est un groupe commutatif topologique (ceci signifie que sur G est définie une topologie de Hausdorff pour laquelle les opérations de groupe $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$ et $g \to g^{-1}$ sont continues) et que sur G est définie une mesure borélienne μ invariante par translation et par passage à l'élément réciproque. L'opération de groupe sur G sera désignée par le signe $+$. La propriété d'invariance de la mesure μ s'écrit alors

$$\mu(X+\alpha) = \mu(X), \quad \mu(-X) = \mu(X) \tag{4}$$

pour tout borélien $X \subset G$ et tout $\alpha \in G$. On sait qu'une telle mesure μ existe si et seulement si le groupe G est localement compact*). Ceci étant elle est définie de façon univoque à un facteur numérique près.

Exemples principaux. 1) $G = \mathbf{R}^n$, l'opération de groupe est l'addition ordinaire des vecteurs, la mesure μ, la mesure habituelle de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$

$$d\mu(x) = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

2) $\mathbf{Z}^n$ un réseau entier de dimension n dans $\mathbf{R}^n$, constitué des vecteurs de coordonnées entières. L'opération de groupe est l'addition, la mesure invariante μ est de la forme $\mu(X) = \operatorname{card} X$ (le nombre de points de l'ensemble X).

3) $\mathbf{T}^n$ un tore de dimension n. Nous considérerons deux réalisations de $\mathbf{T}^n$: soit comme la partie de $\mathbf{C}^n$ constituée de vecteurs $z = (z_1, \ldots, z_n)$ tels que $|z_k| = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, munie du produit sur les coordonnées, soit comme un groupe quotient $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ dont les éléments peuvent être définis par les vecteurs $t \in \mathbf{R}^n$ tels que $t_k \in [0, 1[$, muni de l'addition modulo 1. Ces réalisations sont mises en correspondance par $z_k = e^{2\pi i t_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. La mesure invariante μ est une mesure usuelle de Lebesgue définie en coordonnées $t_1, \ldots, t_n$. Signalons que ce groupe est compact et que $\mu(\mathbf{T}^n) = 1$.

Le *produit de convolution* de f_1 et de f_2 sur un groupe commutatif G de mesure invariante μ est donné par les formules

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(x-y) f_2(y)\, d\mu(y) = \int_G f_1(y) f_2(x-y)\, d\mu(y), \tag{5}$$

qui sont exactement les mêmes que (3) (et se transforment en (3) si G est fini et $\mu(X) = \operatorname{card} X$).

Théorème 1. *Si $f_1, f_2 \in L_1(G, \mu)$ alors l'intégrale (5) existe pour presque tous les $x \in G$, la fonction $f_1 * f_2$ appartient à $L_1(G, \mu)$ et $\|f_1 * f_2\| \leqslant \|f_1\| \, \|f_2\|$.*

Démonstration. Si $f_1, f_2 \in L_1(G, \mu)$ le théorème de Fubini nous dit que la fonction $\varphi(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ appartient à $L_1(G \times G, \mu \times \mu)$ et de plus $\|\varphi\| = \|f_1\| \, \|f_2\|$.

Considérons à présent une application τ de l'espace $G \times G$ qui fait correspondre à un point (x, y) le point $(x+y, y)$. Cette application est

*) Un espace topologique est localement compact si chacun de ses points admet un voisinage précompact.

mesurable (envoie un borélien dans un borélien) et préserve la mesure $\mu\times\mu$. En effet, si $X = A\times B \subset G\times G$ est un ensemble mesurable élémentaire, alors

$$\mu\times\mu(\tau(X)) = \int_{G\times G} \chi_{\tau(X)}(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_{G\times G} \chi_X(x-y, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int_G \left(\int_G \chi_X(x-y, y)\, d\mu(x)\right) d\mu(y) =$$

$$= \int_B \mu(A+y)\, d\mu(y) = \mu(A)\, \mu(B) = \mu\times\mu(X).$$

D'où il résulte que τ induit une transformation isométrique T de l'espace $L_1(G\times G, \mu\times\mu)$ définie par

$$T\varphi(x, y) = \varphi(\tau^{-1}(x, y)) = \varphi(x-y, y).$$

En appliquant ce résultat à la fonction $\varphi(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, on obtient la proposition du théorème.

Remarque. L'inégalité prouvée entraîne la continuité du produit de convolution sur l'espace $L_1(G, \mu)$.

Théorème 2. *Le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif par rapport à l'addition.*

Démonstration. La dernière proposition découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale. Les deux premières se prouvent par un changement de variables préservant la mesure μ ou $\mu\times\mu$. Plus exactement

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(x-y)\, f_2(y)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_G f_1(-y)\, f_2(x+y)\, d\mu(y) = \int_G f_2(x-y)\, f_1(y)\, d\mu(y) = (f_2 * f_1)(x),$$

$$((f_1 * f_2) * f_3)(x) = \int_G (f_1 * f_2)(x-y)\, f_3(y)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_G \int_G f_1(x-y-z)\, f_2(z)\, f_3(y)\, d\mu(z)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_G \int_G f_1(x-z)\, f_2(z-y)\, f_3(y)\, d\mu(z)\, d\mu(y) =$$

$$= (f_1 * (f_2 * f_3))(x).$$

Supposons maintenant que $T(a)$ est un opérateur de translation sur le groupe G: $(T(a)f)(x) = f(x+a)$. Il est clair que $T(a)$ est un opérateur isométrique linéaire sur $L_1(G, \mu)$. Le théorème suivant décrit une propriété importante de la convolution.

Théorème 3. *La convolution commute avec les translations sur un groupe :*

$$T(a)(f_1 * f_2) = T(a) f_1 * f_2 = f_1 * T(a) f_2. \tag{6}$$

Démonstration. On a :

$$T(a)(f_1 * f_2)(x) = (f_1 * f_2)(x+a) = \int_G f_1(x+a-y) f_2(y)\, d\mu(y) =$$
$$= \int_G T(a) f_1(x-y) f_2(y)\, d\mu(y) = (T(a) f_1 * f_2)(x).$$

La deuxième égalité résulte de la première et de la commutativité de la convolution. Dans la suite, nous nous servirons de la notation $S(f)$ pour l'opérateur de convolution de la fonction f: $S(f_1)f_2 = f_1 * f_2$. Le théorème 2 prend la forme des identités

$$S(f_1)S(f_2) = S(f_2)S(f_1) = S(f_1 * f_2), \tag{7}$$

et le théorème 3

$$T(a)S(f) = S(f)T(a) = S(T(a)f). \tag{8}$$

Théorème 4. *Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, alors $S(\varphi)$ est un opérateur continu de $L_1(\mathbf{R}^n, dx)$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ et de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.*

Démonstration. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $f \in L_1(\mathbf{R}^n, dx)$. Montrons que la fonction $S(\varphi)f$ est indéfiniment dérivable et que

$$\partial^k S(\varphi) f = S(\partial^k \varphi) f. \tag{9}$$

Il suffit de toute évidence de vérifier cette affirmation pour le cas particulier de la dérivée partielle $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Soit e_j un vecteur de base dans $\mathbf{R}^n$. L'opérateur ∂_j peut être écrit sous la forme $\lim\limits_{t \to 0} \frac{T(te_j)-1}{t}$. D'après le théorème 3 il commute avec $S(f)$. Donc

$$\partial_j S(\varphi) f(x) = \partial_j S(f)\varphi(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T(te_j)-1}{t} S(f)\varphi(x) =$$
$$= \lim_{t \to 0} S(f) \frac{T(te_j)-1}{t} \varphi(x) = S(f)\partial_j \varphi.$$

La dernière égalité découle du fait que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, la fonction $\frac{T(te_j)-1}{t}\varphi$ tend uniformément vers $\partial_j \varphi$ et que l'opérateur $S(f)$ préserve la convergence uniforme. Donc, on a prouvé l'égalité (9) et l'infinie dérivabilité de $S(\varphi)f$. Vérifions que $S(\varphi)$: $L_1(\mathbf{R}^n, dx) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ est un opérateur continu. Pour toute semi-norme p_{Kk} dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, on a

$$p_{Kk}(S(\varphi)f) = \sup_{x \in K} (\partial^k S(\varphi) f(x)) = \sup_{x \in K} |S(\partial^k \varphi) f(x)| \leqslant \sup_{\mathbf{R}^n} |\partial^k \varphi(x)|\, \|f\|_1,$$

c.q.f.d.

Pour prouver la dernière proposition vérifions que pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, on a

$$\operatorname{supp}(\varphi_1 * \varphi_2) \subset \operatorname{supp} \varphi_1 + \operatorname{supp} \varphi_2, \tag{10}$$

où supp désigne le support et le signe + la somme arithmétique des ensembles : $X+Y = \{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$. En effet, si $x \notin \operatorname{supp} \varphi_1 + \operatorname{supp} \varphi_2$, pour

tout $y \in \operatorname{supp} \varphi_1$ le vecteur $x-y \notin \operatorname{supp} \varphi_2$. Donc, dans l'intégrale (5) qui définit $\varphi_1 * \varphi_2(x)$, l'intégrant est identiquement nul. Donc, $\varphi_1 * \varphi_2$ s'annule en dehors de $\operatorname{supp} \varphi_1 + \operatorname{supp} \varphi_2$. Le dernier ensemble est compact (en tant qu'image continue du compact $\operatorname{supp} \varphi_1 \times \operatorname{supp} \varphi_2 \subset G \times G$), donc il contient $\operatorname{supp}(\varphi_1 * \varphi_2)$. Nous avons prouvé que $S(\varphi)$ applique $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Quant à la continuité, il suffit de la mettre en évidence sur les sous-espaces $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ en raisonnant comme plus haut et en utilisant le fait que $S(\varphi)$ applique $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{D}_{K_1}(\mathbf{R}^n)$, où $K_1 = K + \operatorname{supp} \varphi$, c.q.f.d.

2. Produits de convolution des distributions. La définition de la convolution s'étend aux distributions.

Soient $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Le produit de convolution $F * \varphi$ peut être défini de deux façons.

1. On sait que l'opérateur $S(\varphi)$ (voir théorème 4) est un opérateur continu dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Calculons l'action de l'opérateur adjoint $S(\varphi)'$ sur une distribution régulière $f(x)$. On a

$$\langle S(\varphi)'f, \psi\rangle = \langle f, S(\varphi)\psi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi * \psi(x)\, dx =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, \varphi(x-y)\, \psi(y)\, dy. \tag{11}$$

Posons $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. La dernière expression devient alors :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, \check{\varphi}(y-x)\, \psi(y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} f * \check{\varphi}(y)\, \psi(y)\, dy = \langle S(\check{\varphi})f, \psi\rangle.$$

Nous avons donc établi l'égalité des opérateurs $S(\varphi)' = S(\check{\varphi})$ sur les distributions régulières. D'où il résulte que l'opérateur $S(\varphi)$ admet un prolongement continu à $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, plus exactement il se prolonge en l'opérateur $S(\check{\varphi})'$. Ceci constitue la première définition de la convolution. Mettons-la sous la forme :

$$\langle F * \varphi, \psi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle F, \check{\varphi} * \psi\rangle. \tag{12}$$

2. L'intégrale $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x-y)\, F(y)\, dy$ qui a servi à définir le produit de convolution pour des fonctions peut être déterminée, lorsque $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, comme la valeur de la fonctionnelle F sur la fonction de base $\psi(y) = \varphi(x-y)$. En utilisant les notations précédentes on peut exprimer cette définition par la formule :

$$F * \varphi(x) = \langle F, T(-x)\check{\varphi}\rangle. \tag{13}$$

Donc, d'après la deuxième définition de la convolution, $F * \varphi$ est une fonction sur $\mathbf{R}^n$. Ces deux définitions sont confondues. Plus exactement on a le

Théorème 5. *Si $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, alors la distribution $F * \varphi$ définie par* (12) *est régulière, indéfiniment dérivable et peut être calculée en un point $x \in \mathbf{R}^n$ par la formule* (13).

Démonstration. Remarquons préalablement que l'élément $T(-x) \times \check{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dépend continûment de $x \in \mathbf{R}^n$. (Si $x_n \to x$ dans $\mathbf{R}^n$, alors

$T(-x_n)\check{\varphi} \to T(-x)\varphi$ pour la topologie de l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.) Donc, le second membre de (13) est une fonction continue. Traitons-la comme une distribution régulière sur $\mathbf{R}^n$ et montrons qu'elle est confondue avec la distribution (12). Pour cela nous devons pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ vérifier que

$$\langle F, \check{\varphi} * \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \langle F, T(-x)\check{\varphi} \rangle \psi(x)\, dx$$

ou que

$$\int_{\mathbf{R}^n} F(y) \left(\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x-y)\, \psi(x)\, dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} F(y)\, \varphi(x-y)\, dy \right) \psi(x)\, dx.$$

Prouvons une relation plus générale

$$\int_{\mathbf{R}^n} F(y) \left(\int_{\mathbf{R}^m} \alpha(x, y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} F(y)\, \alpha(x, y)\, dy \right) dx, \tag{14}$$

où $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n+m})$. On remarquera pour cela que l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$ vérifiant (14) forme un sous-espace vectoriel fermé. Ce sous-espace contient toutes les fonctions α de la forme $\alpha(x, y) = \beta(x)\gamma(y)$, $\beta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ et par suite est confondu avec $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$.

Pour prouver le théorème il reste à vérifier l'indéfinie dérivabilité de la fonction $F * \varphi$. Celle-ci découle de l'indéfinie dérivabilité de l'application $x \mapsto T(-x)\check{\varphi}$ qui est immédiatement mise en évidence.

On définit de façon analogue le produit de convolution $F * \varphi$ dans le cas où φ et F appartiennent à d'autres espaces de fonctions de base et de distributions (cf. exercice 604, 605).

Supposons maintenant que $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Montrons qu'on peut définir un produit de convolution $F * f$ qui sera élément de l'espace $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Nous savons déjà que l'opérateur de convolution $S(F)$, $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, applique $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. Il est possible de vérifier que cet opérateur est continu (voir exercice 604). D'autre part on peut généraliser l'opération $\check{}$ et la relation (12) aux distributions. Il s'ensuit que l'opérateur $S(F)$ admet un prolongement continu $\left(\text{en l'occurrence } S(\check{F})'\right)$ à l'espace $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ et applique $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Ceci est la deuxième définition de la convolution. Représentons-la par la formule :

$$\langle F * f, \varphi \rangle = \langle f, \check{F} * \varphi \rangle. \tag{15}$$

Remarque. Dans cette définition, les facteurs F et f ne jouent pas un rôle symétrique. On aurait pu prolonger l'opérateur $S(f)$: $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ en un opérateur continu sur $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ $\left(\text{en l'occurrence } S(\check{f})'\right)$ et définir $F * f$ comme l'image de F par l'opérateur prolongé. On aurait obtenu la formule :

$$\langle F * f, \varphi \rangle = \langle F, \check{f} * \varphi \rangle. \tag{15'}$$

On montre (voir démonstration du théorème 5) que les formules (15) et (15′) définissent la même distribution.

Citons une formule utile pour la convolution des distributions F et f :

$$\langle F * f, \varphi \rangle = \langle F \times f, \mathring{\varphi} \rangle, \tag{16}$$

où $F \times f$ est le produit direct des distributions F et f (voir § 4, chap. III), c'est-à-dire une distribution dans $\mathbf{R}^{2n}$ définie par l'une des égalités équivalentes :

$$\langle F \times f, \alpha \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(x) \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(y)\, \alpha(x, y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} f(y)\, dy \left(\int_{\mathbf{R}^n} F(x)\, \alpha(x, y)\, dx \right), \tag{17}$$

et $\mathring{\varphi}$, la fonction $\varphi(x+y)$. La démonstration de cette formule est laissée au soin du lecteur (elle consiste à faire un changement de variables dans les intégrales contenant les distributions).

Voici la « table de multiplication » de la convolution dans les principaux espaces fonctionnels :

$f_2 \backslash f_1$	$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$	$S'(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$
$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$
$S(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	—	$S(\mathbf{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—
$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—	—	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—	—
$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$	$S(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$	$S'(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$
$S'(\mathbf{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—	$S'(\mathbf{R}^n)$	—	—
$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$	—	—	$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$	—	—

Les traits signifient que l'opération de convolution correspondante n'est pas définie. Par $P\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ on a désigné le sous-espace de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ composé des fonctions croissant pas plus vite qu'un polynôme. Pour retenir cette table il faut savoir la règle suivante : le produit de convolution est défini si l'un au moins des facteurs est à support borné ; indéfiniment dérivable si l'un au moins des facteurs l'est ; à support borné si les deux facteurs le sont.

Théorème 6. *Les opérateurs de convolution commutent entre eux (si leur composition a un sens), avec les opérateurs de translation et avec les opérateurs de dérivation.*

Démonstration. Remarquons préalablement que la première proposition entraîne les deux autres. En effet, les opérateurs de translation et de dérivation sont des cas particuliers de l'opération de convolution. Plus exactement on a

$$T(a)\varphi = \delta_a * \varphi, \tag{18}$$

$$\partial^k \varphi = \partial^k \delta * \varphi. \tag{19}$$

L'égalité (18) pour les fonctions de base φ résulte de (13) :

$$\delta_a * \varphi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \delta_a(x-y)\,\varphi(y)\,dy = \varphi(x+a) = T(a)\,\varphi(x).$$

Pour les distributions φ à support compact, l'égalité (18) résulte de (15) et des égalités $\check{\delta}_a = \delta_{-a}$, $T(a)' = T(-a)$ immédiatement vérifiables.

L'égalité (19) se montre par récurrence sur $|k|$. Le lemme principal de cette démonstration, savoir la relation $\partial_j\varphi = \partial_j\delta * \varphi$ se prouve comme (18).

Il reste à vérifier que $S(f_1)\,S(f_2) = S(f_2)\,S(f_1)$ si f_1 ou f_2 est à support compact. Supposons pour fixer les idées que $f_1 = f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, $f_2 = F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ et vérifions que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \arrow[r, "S(F)"] \arrow[d, "S(f)"'] & \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \arrow[d, "S(f)"] \\
\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \arrow[r, "S(F)"] & \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Par définition, l'action de l'opérateur de convolution sur les distributions équivaut à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \arrow[r, "S(F)"] \arrow[d, "S(f)"'] & \mathcal{E}(\mathbf{R}^n) \arrow[d, "S(f)"] \\
\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \arrow[r, "S(F)"] & \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)
\end{tikzcd}$$

laquelle résulte de (16), c.q.f.d.

Le théorème de commutation des opérateurs de convolution admet une réciproque intéressante et utile.

Théorème 7. *Soit A un opérateur continu de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. Les propriétés suivantes de A sont équivalentes :*

1) *A commute avec les translations ;*

2) *A commute avec les opérateurs de dérivation ;*

3) *A est un opérateur de convolution d'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.*

Démonstration. Le théorème 6 nous dit que 1) et 2) découlent de la propriété 3). Montrons que 1) résulte de 2). Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $a \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$. Considérons la fonction de variable réelle $t \mapsto T(-ta)\,AT(ta)\varphi$ à valeurs dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. La dérivée de cette fonction par rapport à t se calcule immédiatement si l'on se rappelle de l'égalité

$$\frac{d}{dt}T(ta) = D_aT(ta) = T(ta)D_a, \tag{20}$$

valable pour les opérateurs de translation dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ (par D_a on désigne la dérivée le long du vecteur a). Cette dérivée est de la forme

$$[-T(-ta)\,D_aAT(ta)+T(-ta)\,AD_aT(ta)]\varphi,$$

ce qui est nul, puisque A et D_a commutent. Donc, la fonction considérée est constante. En identifiant ses valeurs pour $t = 1$ et $t = 0$, on obtient $T(-a)\,AT(a)\varphi = A\varphi$, d'où résulte 1). Etablissons maintenant la propriété 3) à partir de 1). Pour cela, nous remarquerons que la correspondance $\varphi \mapsto$ $\mapsto A\varphi(0)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Désignons cette fonctionnelle par f. A partir de 1) on peut désormais déduire que $A\varphi(x) =$ $= T(x)\,A\varphi(0) = AT(x)\,\varphi(0) = \langle f, T(x)\varphi\rangle = \check{f} * \varphi(x)$. Donc $A = S(\check{f})$.

Remarque. La proposition du théorème et sa démonstration se généralisent sans modification au cas où l'opérateur A agit de $S'(\mathbf{R}^n)$ ou $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ dans $S'(\mathbf{R}^n)$.

Ceci étant, la propriété 3) se formule ainsi : $A = S(f)$, où $f \in S'(\mathbf{R}^n)$ ou $\in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ respectivement. Il est un peu plus difficile de prouver que tout opérateur de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, commutant avec les translations, est de la forme $S(f)$, où $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Donc, les opérateurs de convolution forment dans tous ces cas une famille commutative maximale. Cette propriété montre que la famille des opérateurs de convolution est similaire à la famille des opérateurs de multiplication par des fonctions. Plus bas nous verrons que cette ressemblance n'est pas fortuite : les deux familles se correspondent par une certaine transformation de l'espace.

§ 2. Transformation de Fourier

1. Caractères d'un groupe commutatif. Soit G un groupe commutatif. On appelle *caractère* de ce groupe un homomorphisme de G dans un groupe $\mathbf{T}$, c'est-à-dire une fonction χ sur G à valeurs complexes, de modules 1, telle que

$$\chi(x+y) = \chi(x)\,\chi(y). \tag{21}$$

Si G est un groupe topologique, alors le terme « caractère » désigne en principe un « caractère continu ». Nous conviendrons que tous les caractères étudiés sont continus sans le spécifier expressément. Si χ_1 et χ_2 sont des caractères du groupe G, il en est de même de leur produit $\chi_1\chi_2$; si χ est un caractère, alors $\chi^{-1} = \bar{\chi}$*) est aussi un caractère. Donc, l'ensemble des caractères du groupe G forme un groupe pour la multiplication ordinaire des fonctions. Ce groupe, noté $\hat{G}$, s'appelle groupe *dual* de G. On fait de $\hat{G}$ un groupe topologique en définissant la convergence $\chi_n \to \chi$ comme une convergence uniforme sur chaque compact $K \subset G$.

Exemple. Soit $G = \mathbf{Z}$ le groupe des entiers. Il est évident que chaque caractère $\chi \in \hat{G}$ est défini par sa valeur sur l'élément générateur $1 \in G$ (à ne pas confondre avec l'unité du groupe qui est 0). En effet, de (21) il vient

$$\chi(n) = [\chi(1)]^n \quad \text{pour tous les} \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{22}$$

*) La barre désigne comme toujours le conjugué complexe.

La valeur $\chi(1)$ peut être un nombre quelconque $z \in \mathbf{T}$. Donc, l'ensemble $\hat{G}$ s'identifie dans ce cas au cercle $\mathbf{T}$.

Théorème 8. Le groupe $\hat{\mathbf{Z}}$ est isomorphe à $\mathbf{T}$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que l'ensemble $\hat{\mathbf{Z}}$ s'identifie naturellement à $\mathbf{T}$. Montrons que cette correspondance est un isomorphisme de groupes topologiques. Désignons par χ_z le caractère défini par la condition $\chi_z(1) = z$, $z \in \mathbf{T}$. L'égalité $\chi_{z_1}\chi_{z_2} = \chi_{z_1 z_2}$ montre que la correspondance $z \to \chi_z$ est un isomorphisme des groupes $\mathbf{T}$ et $\hat{\mathbf{Z}}$. Il reste à vérifier que cette correspondance est un homéomorphisme. Le groupe $\mathbf{Z}$ étant discret, tout compact de $\mathbf{Z}$ contient un nombre fini de points. Donc, la convergence dans $\hat{\mathbf{Z}}$ est une convergence ponctuelle. L'égalité (22) montre que $\chi_{z_n} \to \chi_z$ si et seulement si $\chi_{z_n}(1) \to \chi_z(1)$, c'est-à-dire si $z_n \to z$, c.q.f.d.

Théorème 9. *Le groupe* $\hat{\mathbf{T}}$ *est isomoprhe à* $\mathbf{Z}$.

Démonstration. A tout $n \in \mathbf{Z}$ correspond un caractère χ_n du groupe $\mathbf{T}$ défini par

$$\chi_n(z) = z^n, \quad z \in \mathbf{T}. \tag{23}$$

Nous montrerons plus bas (voir aussi exercice 630) que $\mathbf{T}$ ne possède pas de caractères autres que ceux définis par la formule (23). Donc, la correspondance $n \to \chi_n$ établit l'équivalence des ensembles $\mathbf{Z}$ et $\hat{\mathbf{T}}$. L'égalité $\chi_n\chi_m = \chi_{n+m}$ montre que cette équivalence est un isomorphisme de groupes. Il reste à vérifier que c'est un homéomorphisme d'espaces topologiques. Vérifions pour cela que l'ensemble $\hat{\mathbf{T}}$ est discret. Ceci résulte de l'égalité $\max\limits_{z \in \mathbf{T}} |\chi_n(z) - \chi_m(z)|^2 = \max\limits_{z \in \mathbf{T}} |2 - 2 \operatorname{Re} z^{m-n}| = 4$ pour $m \neq n$, c.q.f.d.

On voit donc que les groupes $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{T}$ sont duals. Ce fait est un cas particulier du résultat suivant :

Principe de dualité de L. Pontriaguine. *Pour tout groupe topologique commutatif localement compact G, l'application naturelle de G dans $\hat{\hat{G}}$ qui à tout élément $g \in G$ associe le caractère f_g sur $\hat{G}$ à l'aide de la formule*

$$f_g(\chi) = \chi(g), \quad \chi \in \hat{G}, \tag{24}$$

est un isomorphisme de groupes topologiques.

Signalons que ce principe n'a pas toujours lieu pour les groupes topologiques généraux (voir exercice 631).

Théorème 10. *Le groupe* $\hat{\mathbf{R}}$ *est isomorphe à* $\mathbf{R}$.

Démonstration. A tout $\lambda \in \mathbf{R}$ associons le caractère $\chi_\lambda \in \hat{\mathbf{R}}$ défini par la formule

$$\chi_\lambda(x) = e^{2\pi i \lambda x}. \tag{25}$$

Montrons que la formule (25) donne tous les caractères du groupe $\mathbf{R}$. Soit $\chi \in \hat{\mathbf{R}}$. Supposons tout d'abord que χ est une fonction dérivable. Alors en dérivant (21) par rapport à y, et en faisant $y = 0$, on obtient $\chi'(x) = c\chi(x)$, où $c = \chi'(0)$. Cette équation différentielle admet une solution

unique vérifiant la condition initiale $\chi(0) = 1$, savoir $\chi(x) = e^{cx}$. La condition $|\chi(x)| \equiv 1$ entraîne que c est imaginaire pur, donc χ est confondue avec l'un des caractères (25).

Affranchissons-nous maintenant de la dérivabilité de χ. Un procédé est de considérer χ comme un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ (voir exercice 627). Un autre est d'utiliser la technique de lissage. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Alors la fonction $\chi * \varphi$ est indéfiniment dérivable. D'autre part, cette fonction est proportionnelle à χ (voir exercice 628) avec un coefficient non nul pour une fonction convenable φ (par exemple pour un terme assez éloigné d'une δ-suite). Il s'ensuit que tout caractère du groupe $\mathbf{R}$ est une fonction indéfiniment dérivable.

Nous avons ainsi établi une correspondance biunivoque entre $\mathbf{R}$ et $\hat{\mathbf{R}}$: $\lambda \to \chi_\lambda$. L'égalité $\chi_\lambda \chi_\mu = \chi_{\lambda+\mu}$ montre que cette correspondance est un isomorphisme de groupes. Prouvons que c'est un homéomorphisme. Si $\lambda_n \to \lambda$, alors $\chi_{\lambda_n} \to \chi_\lambda$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}$, ainsi qu'il résulte de la forme explicite de χ_λ. Inversement, supposons que $\chi_{\lambda_n} \to \chi_\lambda$ uniformément sur tout intervalle. Alors $|\chi_{\lambda_n-\lambda}(x) \to 1|$ uniformément sur $[0, 1]$. Or

$$\sup_{[0,1]} |\chi_{\lambda_n-\lambda}(x)-1| = \sup_{[0,1]} |\sin \pi(\lambda_n-\lambda)x| =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad |\lambda_n-\lambda| \geqslant \frac{1}{2}, \\ \sin \pi |\lambda_n-\lambda| & \text{pour} \quad |\lambda_n-\lambda| \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

d'où il résulte que $\lambda_n \to \lambda$, c.q.f.d.

Remarque 1. Le groupe $\mathbf{R}$ est dual à lui-même au sens de Pontriaguine. Mais l'isomorphisme canonique $\mathbf{R} \to \hat{\mathbf{R}}$ n'existe pas (contrairement à l'isomorphisme $\mathbf{R} \to \hat{\hat{\mathbf{R}}}$). Notre choix de la correspondance $\lambda \to e^{2\pi i\lambda x}$ nous est dicté par la commodité de définition de la transformation de Fourier dans $L_2(\mathbf{R})$ et de la formule de Poisson (voir plus bas). On utilise souvent les correspondances $\lambda \mapsto e^{i\lambda x}$ ou $\lambda \mapsto e^{-i\lambda x}$.

Remarque 2. Nous sommes désormais en mesure de prouver la proposition relative aux caractères du groupe $\mathbf{T}$ omise dans la démonstration du théorème 9. Soit $\chi \in \hat{\mathbf{T}}$. Considérons les fonctions $\chi_1(t) = \chi(e^{2\pi it})$. Il est évident que χ_1 est un caractère du groupe $\mathbf{R}$. Donc $\chi_1(t) = e^{2\pi i\lambda t}$ pour un $\lambda \in \mathbf{R}$. Comme $\chi_1(1) = \chi(1) = 1$, le nombre λ doit être entier, d'où $\chi_1(t) = e^{2\pi int}$, c'est-à-dire $\chi(z) = z^n$.

Nous laissons au lecteur le soin de prouver la proposition générale suivante dont les théorèmes 8, 9, 10 sont un cas particulier.

Théorème 11. *Soit $G = \mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^k \times \mathbf{T}^l$ un produit direct de groupes. Alors le groupe dual $\hat{G}$ est isomorphe à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^l \times \mathbf{T}^k$.*

Soit G un groupe commutatif localement compact de mesure invariante μ. Pour toute fonction $f \in L_1(G, \mu)$ définissons la *transformée de Fourier*

$\tilde{f}$ par la formule

$$\tilde{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\,d\mu(x), \quad \chi \in \hat{G}. \tag{26}$$

Donc, la transformation de Fourier envoie une fonction de G dans une fonction du groupe dual $\hat{G}$.

Exemples. 1) Si $G = \mathbf{Z}$, alors la fonction $f \in L_1(\mathbf{Z})$ est une suite bilatérale sommable $\{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$. La transformation de Fourier associe à cette suite la fonction $f(Z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n z^n$ sur $\mathbf{T}$ appelée parfois *fonction génératrice* de la suite $\{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$.

2) Si $G = \mathbf{T}$, $f \in L_1(\mathbf{T}, dt)$, alors la transformée de Fourier de la fonction f n'est autre chose que la suite des *coefficients de Fourier* de la fonction f : $c_n = \tilde{f}(\chi_n) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\,dt$.

3) Si $G = \mathbf{R}$, $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$, alors la transformée de Fourier de $\tilde{f}$ est une fonction sur $\mathbf{R}$, définie par l'*intégrale de Fourier* : $\tilde{f}(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}\,dx$.

Les propriétés fondamentales de la transformation de Fourier sur un groupe commutatif quelconque sont décrites par le

Théorème 12. *Soit G un groupe commutatif localement compact de mesure invariante μ. La transformation de Fourier envoie l'espace $L_1(G, \mu)$ dans l'espace des fonctions bornées continues sur $\hat{G}$. Ceci étant, le produit de convolution de fonctions se transforme en un produit ordinaire :*

$$(f_1 * f_2)^{\sim}(\chi) = \tilde{f}_1(\chi)\cdot\tilde{f}_2(\chi), \tag{27}$$

l'opérateur de translation $T(x)$, $x \in G$, en l'opérateur de multiplication par le caractère $f_x \in \hat{\hat{G}}$ (voir (24)) :

$$(T(x)f)^{\sim}(\chi) = f_x\tilde{f}(\chi) \tag{28}$$

l'opérateur de multiplication par le caractère $\chi \in \hat{G}$ en l'opérateur de translation $T(\chi^{-1})$ (en écriture multiplicative de l'opération de groupe sur $\hat{G}$) :

$$(M(\chi)f)^{\sim}(\chi_1) = T(\chi^{-1})\tilde{f}(\chi_1) = \tilde{f}(\chi\chi_1^{-1}). \tag{29}$$

Démonstration. Soient $\chi_n \to \chi$ dans $\hat{G}$ et $f \in L_1(G, \mu)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset G$, tel que $\int_{G\setminus K} |f|\,d\mu < \varepsilon$. Par définition de la topologie dans $\hat{G}$ les fonctions $\chi_n(x)$ convergent uniformément vers $\chi(x)$ sur K. Donc, à partir d'un certain numéro $n(\varepsilon)$, on aura $|\chi_n(x) - \chi(x)| < \varepsilon$ pour $x \in K$. D'où

$$|\tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(x)| \leqslant \int_K |f(x)|\,|\chi_n(x) - \chi(x)|\,d\mu(x) + \\ + \int_{G\setminus K} |f(x)(\chi_n(x) - \chi(x))|\,d\mu(x) \leqslant \varepsilon\,\|f\| + 2\varepsilon.$$

Nous avons prouvé la continuité de $\tilde{f}$. Que $\tilde{f}$ soit bornée découle immédiatement de la majoration de l'intégrale (26). Les égalités (27), (28) et (29) se vérifient par un calcul immédiat moyennant un changement de variables, c.q.f.d.

2. Séries de Fourier. Le développement d'une fonction en série de Fourier est le cas le plus étudié de la transformation de Fourier sur un groupe commutatif (le groupe **T** en ce qui nous concerne). L'étude des séries de Fourier constitue un vaste domaine de la théorie des fonctions. Nous nous limitons ici aux faits essentiels, les plus importants pour les applications.

Dans la suite, pour désigner la transformée de Fourier d'une fonction f sur **T**, au lieu de la notation $\tilde{f}(\chi)$ on se servira de la notation plus classique

$$c_n = \tilde{f}(\chi_n) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\,dt.$$

Théorème 13. *La transformation de Fourier est un opérateur unitaire de* $L_2(\mathbf{T}, dt)$ *dans* $L_2(\mathbf{Z})$.

La démonstration découle de la proposition de l'exercice 531 qui dit que les fonctions $\chi_n(t) = e^{2\pi int}$ forment une base orthonormée dans $L_2(\mathbf{T}, dt)$ et du calcul des transformées de Fourier correspondantes. Si par e_n on désigne la suite bilatérale qui contient l'unité à la n-ième place et zéro partout ailleurs, alors cette suite sera exactement la transformée de Fourier de la fonction χ_n. Comme $\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base orthonormée dans $L_2(\mathbf{Z})$, la transformation de Fourier est unitaire (voir exercice 561).

Ce théorème est un cas particulier du fait général suivant :

Soient G un groupe commutatif compact, $\hat{G}$, le groupe discret dual de G (voir exercice 625). *On admettra que les mesures invariantes μ et $\hat{\mu}$ définies sur ces groupes sont normées par les conditions :*

$$\mu(G) = 1; \quad \hat{\mu}(X) = \operatorname{card} X \quad \textit{pour} \quad X \subset \hat{G}.$$

Alors la transformation de Fourier est un opérateur unitaire de $L_2(G, \mu)$ dans $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$.

Il existe de nombreux résultats sur les liens de l'indéfinie dérivabilité de la fonction f sur **T** avec la rapidité de décroissance de ses coefficients de Fourier (voir, par exemple, exercices 645 à 648). La déduction de ces résultats repose essentiellement sur le

Théorème 14. *L'opérateur de dérivation se transforme par la transformation de Fourier en un opérateur de multiplication par la suite $\{2\pi in\}_{n\in\mathbf{Z}}$.*

Démonstration. Soit $f \in C^1(\mathbf{T})$; alors les coefficients de Fourier c_n^1 de la dérivée de la fonction f se calculent par une intégration par parties:

$$c_n^1 = \int_0^1 f'(t)e^{-2\pi int}\,dt = e^{-2\pi int}f(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)\,de^{-2\pi int} = 2\pi inc_n,$$

où $c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\,dt$ sont les coefficients de Fourier de f, c.q.f.d.

Généralisons maintenant la transformation de Fourier aux distributions sur **T**. Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$. Il est naturel d'appeler *transformation de Fourier de la distribution* f la collection de coefficients $c_n = \langle f, e^{-2\pi int}\rangle$.

On dira qu'une suite bilatérale $\{c_n\}_{z \in \mathbf{Z}}$ est *lentement croissante* (ou est une suite *à croissance lente*) si $c_n = O(n^k)$ pour un k. Désignons par $P(\mathbf{Z})$ l'espace des suites lentement croissantes.

Théorème 15. *La transformation de Fourier définit un isomorphisme des espaces* $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ *et* $P(\mathbf{Z})$ *qui au produit de convolution fait correspondre un produit ordinaire, à l'opérateur de translation* $T(t)$, *l'opérateur de multiplication par la suite* $\{e^{2\pi int}\}$, *à l'opérateur de dérivation par rapport à* t, *l'opérateur de multiplication par la suite* $\{2\pi in\}$, *à la multiplication par le caractère* $e^{2\pi ikt}$, *une k-translation.*

Démonstration. Ces propriétés ont déjà été démontrées pour les distributions régulières. Il reste à se rappeler que toute distribution sur **T** est une somme finie de dérivées d'un certain ordre de fonctions régulières.

Voyons maintenant comment calculer une fonction f si l'on connaît sa transformée de Fourier $\{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$. Si $f \in L_2(\mathbf{T}, dt)$, nous savons

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{2\pi int}. \tag{30}$$

La série du second membre converge dans l'espace $L_2(\mathbf{T}, dt)$. Si les coefficients c_n décroissent assez rapidement, cette série converge dans un sens plus fort. Par exemple, si $c_n = O(n^{-k})$ pour tous les $k > 0$, alors la série converge pour la topologie de l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{T})$. Le problème de la convergence de la série de Fourier occupe une place importante en théorie des fonctions. Nous ne nous attarderons pas sur les problèmes (parfois complexes) susceptibles d'apparaître.

Comparons la formule (30) avec la définition de la transformation de Fourier sur le groupe **Z** :

$$\{c_n\} \to \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{-2\pi int}.$$

Nous voyons que ces transformées se déduisent l'une de l'autre par une composition avec une transformée sur **T** ou sur **Z** :

$$\{c_n\} = \{c_{-n}\} \quad \text{ou} \quad \check{f}(t) = f(-t).$$

Définissons la *transformation réciproque de Fourier* pour la composition de la transformation ordinaire (ou *directe*) de Fourier et de la transformation $\check{}$. On a le principe général : la transformation directe et la transformation réciproque de Fourier sont des opérateurs réciproques. L'énoncé exact de ce principe avec l'indication des classes de fonctions correspondantes sur G et $\hat{G}$ dépend du caractère du groupe G.

3. Intégrale de Fourier. La transformation de Fourier d'une fonction sur la droite réelle est définie par l'*intégrale de Fourier :*

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx. \tag{31}$$

On rappelle qu'au numéro 2 nous avons introduit la notion de transformation réciproque de Fourier :

$$\check{\tilde{f}}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i\lambda x}\,dx. \tag{32}$$

Théorème 16. *Les transformations directe et réciproque de Fourier sont des transformations mutuellement réciproques de l'espace* $S(\mathbf{R})$.

Démonstration. Montrons que l'espace $S(\mathbf{R})$ s'applique dans lui-même par les transformations (directe et réciproque) de Fourier. En effet, comme $f \in S(\mathbf{R})$ et que toutes ses dérivées sont sommables et tendent vers zéro à l'infini, une intégration par parties nous donne

$$(\tilde{f}^{(k)})(\lambda) = (2\pi i\lambda)^k \tilde{f}(\lambda). \tag{33}$$

Les fonctions $x^k f(x)$ étant sommables pour tout k, la dérivation de la formule (31) par rapport à λ nous donne

$$\tilde{f}^{(k)} = [f(-2\pi i x)^k]^{\sim}. \tag{34}$$

En désignant la transformation de Fourier par F, on peut écrire (33) et (34) sous forme des relations de commutation

$$FD^k = M^k F, \quad F(-M)^k = D^k F, \tag{35}$$

$$FDF^{-1} = M, \qquad FMF^{-1} = -D, \tag{36}$$

où D désigne l'opérateur de dérivation d/dx, M, l'opérateur de multiplication par $2\pi i x$. La famille de semi-normes définissant la topologie de $S(\mathbf{R})$ est

$$p_{kl}(f) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^k f^{(l)}(x)|.$$

Le théorème 29 du chap. III nous dit que cette famille est équivalente à

$$p'_{kl}(f) = \int_{\mathbf{R}} |x^k f^{(l)}(x)|\,dx.$$

Majorons la semi-norme $p'_{kl}(\tilde{f})$ par la semi-norme $p'_{mn}(f)$. Remarquons pour cela que $p_{kl}(f) = (2\pi)^k - p_{00}(M^k D^l f)$, $p'_{kl}(f) = (2\pi)^{-k} p'_{00}(M^k D^l f)$. D'autre part, la majoration de l'intégrale (31) donne $p_{00}(\tilde{f}) \leqslant p'_{00}(f)$. D'où

$$p_{kl}(\tilde{f}) = (2\pi)^{-k} p_{00}(M^k D^l \tilde{f}) = (2\pi)^{-k} p_{00}((D^k M^l f)^{\sim}).$$

Il reste à permuter les opérateurs D^k et M^l pour obtenir la majoration annoncée. D'après la formule de Leibniz on a

$$D^k M^l = \sum_{j=0}^{\min(k,l)} \frac{k!\,l!}{j!\,(k-j)!\,(l-j)!} (2\pi)^j M^{l-j} D^{k-j}. \tag{37}$$

Nous avons démontré la continuité de l'application F. La continuité de la transformation réciproque de Fourier $\check{F}$ se prouve exactement de la

même manière à l'aide des relations de commutation

$$\check{F}D^k = (-M)^k \check{F}, \qquad \check{F}M^k = D^k\check{F} \tag{35'}$$

où

$$\check{F}D(\check{F})^{-1} = -M, \qquad \check{F}M(\check{F})^{-1} = D. \tag{36'}$$

Considérons maintenant la composition des transformations F et $\check{F}$. Des relations (36 et 36′) il vient immédiatement que cette composition commute avec les opérateurs D et M.

Lemme. *Tout opérateur continu dans l'espace $S(\mathbf{R})$ commutant avec l'opérateur M est un opérateur de multiplication par une fonction quelconque.*

Démonstration. Supposons qu'un opérateur A de $S(\mathbf{R})$ commute avec M. Alors il commute avec l'opérateur de multiplication par un polynôme quelconque. Montrons que pour toute fonction $\varphi \in S(\mathbf{R})$ et pour tout point $a \in \mathbf{R}$, la valeur $A\varphi(a)$ dépend seulement de $\varphi(a)$. En effet, si $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, la différence $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ est nulle en a, donc est de la forme $(x-a)\psi(x)$, où $\psi \in S(\mathbf{R})$. Par suite, $A\varphi_1(x) = A[\varphi_2+(x-a)\psi] = A\varphi_2(x)+(x-a)A\psi(x)$, puisque A commute avec la multiplication par $x-a$. D'où $A\varphi_1(a) = A\varphi_2(a)$, ce que nous voulions. Donc, pour tout point $a \in \mathbf{R}$ il existe un nombre $f(a)$ tel que $A\varphi(a) = f(a)\varphi(a)$ pour tous les $\varphi \in S(\mathbf{R})$. Donc $A = M(f)$, c.q.f.d.

Remarque. La démonstration effectuée ne nous permet de faire aucune conclusion quant à la structure de la fonction f. Mais nous savons que pour toute fonction $\varphi \in S(\mathbf{R})$, la fonction $f\varphi$ appartient aussi à $S(\mathbf{R})$. D'où il résulte que f est indéfiniment dérivable.

Revenons à la démonstration du théorème. D'après le lemme prouvé, les opérateurs $F\check{F}$ et $\check{F}F$ sont des opérateurs de multiplication. De plus, on a la relation

$$DM(f)-M(f)D = M(f'),$$

qui découle de la règle de Leibniz. Donc, l'opérateur $M(f)$ commute avec l'opérateur D si et seulement si $f' = 0$, c'est-à-dire $f = \text{const}$. Ceci montre que les opérateurs $F\check{F}$ et $\check{F}F$ sont scalaires : $F\check{F} = C_1$, $\check{F}F = C_2$. Pour achever la démonstration du théorème il reste à vérifier que $C_1 = C_2 = 1$. Ceci résulte, par exemple, du calcul de la transformée de Fourier d'une fonction quelconque de $S(\mathbf{R})$ (voir exercice 668).

Théorème 17. *Il existe un opérateur unitaire dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$ dont la restriction à l'ensemble $L_2(\mathbf{R}, dx)\cap L_1(\mathbf{R}, dx)$ est confondue avec la transformation de Fourier. (Cet opérateur sera désigné dans la suite par la même lettre F que la transformation directe de Fourier.)*

En particulier, toute fonction $f \in S(\mathbf{R})$ est justiciable de la *formule de Plancherel :*

$$\|f\|_{L_2(\mathbf{R}, dx)} = \|\tilde{f}\|_{L_2(\mathbf{R}, d\lambda)}. \tag{38}$$

Démonstration. Du théorème (16) et des propriétés générales de la transformation de Fourier (voir n° 1), il vient que la transformation de Fourier

transforme la multiplication en un produit de convolution :

$$(f_1 f_2)^{\sim} = \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2. \tag{39}$$

Appliquons cette égalité au cas particulier où $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = \overline{f(x)}$. Il vient $\tilde{\bar{f}}(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} \bar{f}(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx = \overline{\tilde{f}(-\lambda)}$. Donc (39) nous donne

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 e^{-2\pi i\lambda x}\, dx = \int_{\mathbf{R}} \tilde{f}(\lambda-\mu)\overline{\tilde{f}(-\mu)}\, d\mu.$$

En faisant $\lambda = 0$ et en remplaçant $-\mu$ par λ on obtient (38). Comme $S(\mathbf{R})$ est dense dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$, de (38) il s'ensuit que l'opérateur F admet un prolongement unitaire unique de $S(\mathbf{R})$ à $L_2(\mathbf{R}, dx)$. Il reste à vérifier que ce prolongement est défini par l'intégrale (31) sur le sous-espace $L = L_2(\mathbf{R}, dx) \cap L_1(\mathbf{R}, dx)$. Supposons que $\varphi \in L$, $\varphi_n \in S(\mathbf{R})$ et $\varphi_n \to \varphi$ au sens de chacune des normes de $L_2(\mathbf{R}, dx)$ et $L_1(\mathbf{R}, dx)$. Alors $\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}$ uniformément et $\tilde{\varphi}_n \to F\varphi$ au sens de la convergence dans $L_2(\mathbf{R}, d\lambda)$. Ceci entraîne la convergence presque partout d'une suite partielle $\tilde{\varphi}_{n_k}$ vers $F\varphi$. D'où $F\varphi = \check{\varphi}$, c.q.f.d.

Remarque. Le théorème 17 est un cas particulier de la proposition générale : si G est un groupe commutatif localement compact de mesure invariante μ, il existe une mesure invariante $\hat{\mu}$ sur le groupe dual $\hat{G}$ et un opérateur unitaire $F: L_2(G, \mu) \to L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ dont la restriction à $L_2(G, \mu) \cap \cap L_1(G, \mu)$ est confondue avec la transformée de Fourier.

De même que dans le cas du cercle, la dérivabilité indéfinie de la fonction f sur la droite est liée à la décroissance à l'infini de sa transformée de Fourier $\tilde{f}$. Le groupe $\mathbf{R}$ étant autodual on a la proposition duale : la décroissance à l'infini de la fonction f est liée à l'indéfinie dérivabilité de $\tilde{f}$. Voici une forme de l'énoncé exact.

Théorème 18. *Si une fonction f est sommable sur* $\mathbf{R}$ *avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k, alors $\tilde{f}$ vérifie la majoration*

$$|\tilde{f}(\lambda)| = O(1+|\lambda|)^{-k}.$$

Si la fonction $(1+|x|)^k f(x)$ est sommable sur $\mathbf{R}$, *alors la fonction admet des dérivées bornées continues jusqu'à l'ordre k.*

La démonstration résulte des relations de commutation (35). (Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que ces relations restent valables si l'on se place dans les conditions du théorème 18.)

La condition de décroissance rapide à l'infini lorsque $G = \mathbf{R}$ peut être formulée de diverses manières. La condition la plus forte consiste à exiger que la fonction f soit à support borné. Il se trouve que cette condition entraîne l'analyticité de la fonction $\tilde{f}$ sur le plan complexe $\mathbf{C}$ renfermant la droite $\mathbf{R}$.

Théorème de Paly-Wiener. *Les transformées de Fourier des éléments de l'espace $L_2(]-a, a[)$ (traité comme un sous-espace de $L_2(\mathbf{R}, dx)$) sont toutes les fonctions analytiques entières $g(\lambda)$, possédant les propriétés suivantes :*

1) $|g(\lambda)| < Ce^{2\pi a\,|\mathrm{Im}\,\lambda|}$, *où la constante C dépend de la fonction g ;*
2) *la restriction* de $g(\lambda)$ *à* $\mathbf{R}$ *appartient à* $L_2(\mathbf{R}, d\lambda)$.

Démonstration. L'intégrale (31) définissant la fonction $\tilde{f}$ pour $f \in L_2(]-a, a[)$ converge pour tous les $\lambda \in \mathbf{C}$. Un calcul immédiat nous montre que $\tilde{f}(\lambda)$ est dérivable par rapport à la variable complexe λ, donc est une fonction entière.

La nécessité de la condition 1) résulte de la majoration

$$|f(\lambda)| = \left| \int_{-a}^{a} f(x) e^{-2\pi i \lambda x}\, dx \right| \leqslant \int_{-a}^{a} |f(x)|\, e^{2\pi \operatorname{Re}(i\lambda x)}\, dx,$$

celle de la condition 2), du théorème 17.

Montrons la suffisance de ces deux conditions. La restriction de g à $\mathbf{R}$ appartenant à $L_2(\mathbf{R}, d\lambda)$, il existe une fonction $f \in L_2(\mathbf{R}, dx)$ telle que $g = \tilde{f}$. Supposons tout d'abord que $g(\lambda)$ décroît assez vite à l'infini : $|g(\lambda)| \leqslant \frac{Ce^{2\pi a |\operatorname{Im} \lambda|}}{1+|\lambda|^2}$. Alors $g(\lambda)$ est sommable sur $\mathbf{R}$ et f peut être exprimée en fonction de g par la transformation réciproque de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{2\pi i \lambda x}\, d\lambda.$$

D'après le lemme de Cauchy, le contour d'intégration peut être déplacé dans le domaine complexe : $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda + ib) e^{2\pi i(\lambda + ib)x}\, dx$. Soit $x > a$. Alors pour $b > 0$ l'intégrant est majoré par $\frac{Ce^{2\pi b(a-x)}}{1+|\lambda|^2}$ et, par suite, l'intégrale qui nous intéresse tend vers zéro. Comme la valeur de cette intégrale ne dépend pas de b, il vient $f(x) = 0$ pour $x > a$. De façon analogue, en faisant tendre b vers $-\infty$, on obtient $f(x) = 0$ pour $x < -a$. Il reste à nous affranchir de la condition de décroissance de $g(\lambda)$ à l'infini. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Alors la fonction $\tilde{\varphi}(\lambda)$ décroît rapidement à l'infini et vérifie la majoration $|\tilde{\varphi}(\lambda)| \leqslant Ce^{2\pi\varepsilon |\operatorname{Im} \lambda|}$ d'après la partie du théorème qui a été démontrée. Les raisonnements précédents liés à la substitution de $a+\varepsilon$ à a s'appliquent à la fonction $g_1(\lambda) = g(\lambda)\tilde{\varphi}(\lambda)$. Donc, la fonction $f_1(\varepsilon) = f * \varphi$ appartient à $L_2(]-a-\varepsilon, a+\varepsilon[)$. D'où l'on déduit sans peine que $f \in L_2(]-a, a[)$, c.q.f.d.

4. Transformation de Fourier des distributions. Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$. L'intégrale définissant la transformation de Fourier de la fonction f peut être traitée comme la valeur de la distribution f sur le caractère $\overline{\chi}_\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$:

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle f, \overline{\chi}_\lambda \rangle. \tag{40}$$

On peut donner une définition plus large de la transformation de Fourier en s'inspirant du schéma décrit au n° 5, § 3, chap. III. Si $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$, $\varphi \in S(\mathbf{R})$, alors

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i \lambda x} f(x)\, \varphi(\lambda)\, dx\, d\lambda = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle.$$

Le second membre de cette égalité a un sens pour $f \in S'(\mathbf{R})$. Ceci nous suggère de définir la *transformation de Fourier dans l'espace* $S'(\mathbf{R})$ par la formule

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in S(\mathbf{R}). \tag{41}$$

Si $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$, cette définition est équivalente à celle donnée par la formule (40).

Théorème 19. *Les transformations directe et réciproque de Fourier sont des opérateurs continus mutuellement réciproques dans* $S'(\mathbf{R})$.

La démonstration découle immédiatement de la formule (41) qui prouve que dans $S'(\mathbf{R})$ la transformation de Fourier est un opérateur adjoint de la transformation de Fourier dans $S(\mathbf{R})$.

La transformation de Fourier des distributions possède les propriétés fondamentales de la transformation de Fourier des fonctions : elle transforme le produit de convolution en multiplication ordinaire, la translation en multiplication par un caractère, la multiplication par un caractère en translation, l'opérateur de dérivation à coefficients constants en opérateur de multiplication par un polynôme.

Remarque. La transformation de Fourier des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ peut aussi être définie par la formule (41). Cependant, les images par cette application ne seront plus les distributions des classes que nous connaissons déjà. On montre que l'image de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ par la transformation de Fourier est un espace de fonctions analytiques $g(\lambda)$ qui pour tout N et des C et R convenablement choisis, admettent la majoration

$$|g(\lambda)| < C(1+|\lambda|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Les transformées de Fourier des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ sont des fonctionnelles linéaires sur cet espace.

Exemple. La distribution régulière $f(x) = e^{x^2}$ admet pour transformée de Fourier la fonctionnelle linéaire

$$\langle \tilde{f}, g \rangle = \frac{i}{\pi} \int_C e^{\pi^2\lambda^2} g(\lambda)\, d\lambda,$$

où l'intégrale est prise le long d'un contour C dans le plan complexe λ.

On peut prouver certaines propriétés intéressantes des distributions par un procédé purement algébrique en utilisant les relations de commutation de la transformation de Fourier avec les opérateurs de translation et de multiplication par un caractère. Un exemple nous est fourni par la *formule* suivante de sommation *de Poisson.*

Théorème 20. *Pour toute fonction* $\varphi \in S(\mathbf{R})$ *on a*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{\varphi}(k). \tag{42}$$

Démonstration. L'égalité (42) revient à affirmer que $\tilde{f} = f$ où $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(x-k)$. La distribution f possède les propriétés suivantes :

1) $T(1)f = f$, 2) $M(1)f = f$, où $T(1)$ est une 1-translation, $M(1)$, l'opérateur de multiplication par $\chi_1 = e^{2\pi i x}$. Les propriétés 1) et 2) se transforment l'une en l'autre par la transformation de Fourier (voir exercice 708). Montrons que f est définie par ces propriétés à un facteur multiplicatif constant près. En effet, de la propriété 2) on déduit immédiatement que le support de f est contenu dans $\mathbf{Z}$, et qu'en chaque point de ce support, f admet un ordre nul. D'où $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \delta(x-k)$. De la propriété 1) il s'ensuit maintenant que tous les coefficients c_k sont égaux entre eux et $f = c \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(x-k)$. Il reste à calculer la constante c. L'égalité $\tilde{\tilde{f}} = f$ montre que $c^2 = 1$. Comme $S(\mathbf{R})$ contient des fonctions positives dont la transformée de Fourier est positive, le cas $c = -1$ est impossible, c.q.f.d.

Remarque 1. On peut affaiblir de façon substantielle la condition $\varphi \in S(\mathbf{R})$. Il suffit par exemple que φ et $\tilde{\varphi}$ admettent une majoration de la forme $O(|x|^{-1-\varepsilon})$.

Remarque 2. La formule de Poisson est un cas particulier d'une proposition plus générale. Soient

$$0 \to G_0 \to G \to G_1 \to 0$$

une suite exacte de groupes commutatifs localement compacts,

$$0 \leftarrow \hat{G}_0 \leftarrow \hat{G} \leftarrow \hat{G}_1 \leftarrow 0$$

la suite duale. Si les mesures invariantes μ_0 sur G_0 et $\hat{\mu}_1$ sur $\hat{G}_1$ sont convenablement choisies on a alors

$$\int_{G_0} f(x)\, d\mu_0(x) = \int_{\hat{G}_1} \tilde{f}(\chi)\, d\mu_1(\chi).$$

CHAPITRE 5

THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS

§ 1. Calcul fonctionnel

1. Fonctions opératorielles dans un espace de dimension finie. Les opérateurs linéaires peuvent être traités comme la généralisation de la notion de nombre. En dimension un, ces deux notions sont confondues. Mais dès la dimension deux on voit apparaître des différences dont la plus importante est la non-commutativité de la multiplication pour les opérateurs. Néanmoins, de nombreuses propriétés des nombres sont valables lorsqu'on passe aux opérateurs dans des espaces à plusieurs dimensions. L'une de ces propriétés est la possibilité d'utiliser les opérateurs comme arguments de fonctions. L'étude de ces fonctions opératorielles constitue l'objet du *calcul fonctionnel opératoriel.* Nous nous limiterons aux fonctions à une variable, ce qui nous affranchira des difficultés dues à la non-commutativité*). Dans ce numéro nous étudions une fonction opératorielle dans un espace de dimension finie.

Soit A un opérateur linéaire dans un espace vectoriel L de dimension finie sur un corps $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Les fonctions opératorielles les plus simples sont les polynômes. Si $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, il est naturel de définir $p(A)$ par l'égalité

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k, \tag{1}$$

en convenant que $A^0 = 1$ (l'opérateur identité). La dernière condition est nécessaire à la réalisation de l'égalité

$$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(A) = \lambda_1 p_1(A) + \lambda_2 p_2(A), \quad (p_1 p_2)(A) = p_1(A)\, p_2(A), \tag{2}$$

qui exprime le fait que l'application $p \mapsto p(A)$ est un homéomorphisme de l'algèbre des polynômes dans l'algèbre des opérateurs.

) Une variante du calcu lfonctionnel non commutatif est accessible dans l'ouvrage de V. Maslov [13]. Une autre dans la théorie des représentations des groupes matriciels.

Une autre classe de fonctions plus vaste est la classe des fonctions rationnelles. Si $r(x) = p(x)/q(x)$, où p et q sont des polynômes, alors nous définissons $r(A)$ par la formule

$$r(A) = p(A)\,q(A)^{-1} = q(A)^{-1}p(A). \tag{3}$$

Cette définition a un sens si seulement $q(A)$ est un opérateur inversible. En dimension finie, l'inversibilité de $q(A)$ est équivalente à la condition $\det q(A) \neq 0$.

Le cas le plus important est la *résolvante* de l'opérateur A qui est définie par la formule

$$R_\lambda(A) = (A-\lambda\cdot 1)^{-1} = r_\lambda(A), \tag{4}$$

où $r_\lambda(x) = 1/(x-\lambda)$.

La correspondance $r \mapsto r(A)$ est un homomorphisme d'une sous-algèbre du corps des fonctions rationnelles dans l'algèbre des opérateurs. On vérifie que cette sous-algèbre est constituée de toutes les fonctions rationnelles dont les pôles sont situés en dehors du spectre (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres) de l'opérateur A.

Jusqu'ici nous n'avons pas fait usage de la topologie. Supposons maintenant que L est un espace normé, par conséquent, l'ensemble des opérateurs de L est muni aussi d'une norme. Nous pouvons alors définir une fonction analytique entière de l'opérateur A avec la formule

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k, \tag{5}$$

si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. En effet, si f est une fonction entière, alors la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \|A\|^k$ est convergente. D'où il résulte que la suite des sommes partielles de la série (5) est fondamentale, donc admet une limite dans l'espace des opérateurs dans L.

Exemple. Calculons e^{tA}, où A est l'opérateur de rotation de 90° dans $\mathbf{R}^2$, t, un paramètre réel. Comme $A^2 = -1$, la série de e^{tA} s'écrit

$$e^{tA} = 1+tA-\frac{t^2}{2!}\cdot 1-\frac{t^3A}{3!}+\frac{t^4}{4!}\cdot 1+\frac{t^5}{5!}A-\ \ldots,$$

d'où $e^{tA} = \cos t\cdot 1+\sin t\cdot A$. Cette égalité s'écrit sous la forme matricielle

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Supposons maintenant que l'espace des polynômes ou des fonctions analytiques entières est muni d'une norme pour laquelle l'application $f \mapsto f(A)$ est continue. Alors cette application se prolonge par continuité à la complétion de l'espace des polynômes ou des fonctions entières pour cette norme.

Exemple. Supposons que l'opérateur A est défini par une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des nombres réels appartenant à l'intervalle $[a, b]$. Alors la correspondance $f \mapsto f(A)$ est continue pour la norme de $C[a, b]$, et, par suite, on peut définir $f(A)$ pour toute fonction continue sur $[a, b]$.

En dimension finie, le problème de savoir quelles fonctions de l'opérateur A ont un sens est entièrement résolu de la manière suivante. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ une collection de nombres complexes, $n_1, \ldots, n_k$ une collection de nombres naturels. Définissons sur l'espace des polynômes la semi-norme

$$p_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k; n_1, \ldots, n_k}(f) = \max_{1 \leq j \leq k} \max_{0 \leq m \leq n_j} |f^{(m)}(\lambda_j)|. \tag{6}$$

Si A est un opérateur dans un espace vectoriel complexe de dimension finie L, on désignera par p_A la semi-norme dans l'espace des polynômes :

$$p_A(f) = ||f(A)||.$$

Théorème 1. *Soit A un opérateur dans un espace vectoriel complexe de dimension finie, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, les zéros du polynôme de plus petit degré annulant l'opérateur A, $n_1, \ldots, n_k$, la multiplicité de ces zéros. Alors les semi-normes $p_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k; n_1, \ldots, n_k}$ et p_A sont équivalentes.*

Démonstration. Soit L l'espace des polynômes, L_0, le sous-espace des polynômes admettant au point λ_j une racine de multiplicité $\geq n_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Les semi-normes mentionnées dans le théorème annulent l'espace L_0 et engendrent des normes sur l'espace quotient L/L_0. Le dernier espace étant de dimension finie, deux normes quelconques y sont équivalentes.

Corollaire 1. *Si A est un opérateur de valeurs propres simples, l'expression $f(A)$ a un sens pour toute fonction continue f.*

Corollaire 2. *Si A est un opérateur dans un espace de dimension n, l'expression $f(A)$ a un sens pour toute fonction $n-1$ fois dérivable.*

2. Fonctions d'opérateur auto-adjoint borné. Soit A un opérateur auto-adjoint borné dans un espace hilbertien H sur un corps $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On se propose de définir $f(A)$ pour toute fonction borélienne f sur l'intervalle $[-a, a]$ où $a = ||A||$.

On rappelle que le *spectre* de l'opérateur A est l'ensemble $\sigma(A) \subset \mathbf{C}$ composé de tous les $\lambda \in \mathbf{C}$ pour lesquels l'opérateur $A - \lambda \cdot 1$ n'est pas inversible. Le complémentaire de $\sigma(A)$ dans $\mathbf{C}$ s'appelle *ensemble résolvant* et se note $\varrho(A)$. Donc, la résolvante de l'opérateur A : $r_\lambda(A) = (A - \lambda 1)^{-1}$ est définie pour $\lambda \in \varrho(A)$.

Théorème 2. *Le spectre d'un opérateur borné est un sous-ensemble compact non vide dans* $\mathbf{C}$.

Démonstration. Si $|\lambda| > ||A||$, alors l'opérateur $A - \lambda \cdot 1$ admet un opérateur réciproque $r_\lambda(A)$ défini par la série :

$$r_\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k. \tag{7}$$

Donc $\sigma(A)$ est contenu dans le disque $|\lambda| \leqslant ||A||$. Si en un point $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ existe la résolvante $r_{\lambda_0}(A) = B$, alors la série

$$r_\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k B^{k+1} \tag{8}$$

converge dans le disque de rayon $||B||^{-1}$.

Ceci montre que l'ensemble résolvant $\varrho(A)$ est ouvert, donc que $\sigma(A)$ est un compact. Nous avons établi incidemment que la norme de la résolvante admet la minoration suivante :

$$||r_\lambda(A)|| \geqslant d(\lambda, \sigma(A))^{-1} = \left(\min_{\mu \in \sigma(A)} (\lambda-\mu)\right)^{-1}. \tag{9}$$

Il reste à prouver que le spectre n'est pas vide. Supposons par absurde que $\sigma(A) = \varnothing$. Alors la résolvante $r_\lambda(A)$ est une fonction analytique entière de $\lambda \in \mathbf{C}$. La formule (7) montre que $||r_\lambda(A)|| \to 0$ pour $\lambda \to \infty$. Donc $||r_\lambda(A)||$ est bornée sur le plan complexe tout entier. Quels que soient les vecteurs x et y de H la quantité $(r_\lambda(A)x, y)$ est une fonction analytique entière de λ qui tend vers zéro à l'infini. D'après le théorème de Liouville cette fonction est identiquement nulle. Donc $r_\lambda(A) = 0$, ce qui est impossible, c.q.f.d.

Voyons maintenant comment change le spectre de A lorsqu'on transforme l'opérateur A.

Théorème 3. 1) *Soit $r(x)$ une fonction rationnelle ne possédant pas de pôles dans le spectre de l'opérateur A. Alors l'opérateur $r(A)$ est défini et son spectre est décrit par la formule*

$$\sigma(r(A)) = r(\sigma(A)) = \{r(\lambda):\ \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{10}$$

2) *Le spectre de l'opérateur dual A^* est relié à celui de A par la relation*

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \{\bar{\lambda},\ \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{11}$$

Démonstration. Supposons que $r(x) = p(x)q(x)^{-1}$, où p et q sont des polynômes premiers entre eux. Si $\mu_1, \ldots, \mu_m$ sont les zéros de $p(x)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ceux de $q(x)$ (compte tenu de leur multiplicité), alors $r(x) = c\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)\prod_{j=1}^{n}(x-\beta_j)^{-1}$. D'où $r(A) = c\prod_{i=1}^{m}(A-\alpha_i 1)\prod_{j=1}^{n} r_{\beta_j}(A)$. Supposons que $\lambda \in \sigma(A)$ et $\mu = r(\lambda)$. La fonction rationnelle $r(x)-\mu$ s'annulant pour $x = \lambda$ son numérateur admet λ pour racine, donc contient le facteur $x-\lambda$. Par suite, l'opérateur $r(A)-\mu\cdot 1$ renferme comme facteur l'opérateur non inversible $A-\lambda\cdot 1$ et par conséquent est lui-même non inversible. Donc $\mu \in \sigma(r(A))$. Nous avons prouvé l'inclusion $r(\sigma(A)) \subset \sigma(r(A))$.

Inversement, soit $\mu \in \sigma(r(A))$. Mettons la fonction rationnelle $r(x)-\mu$ sous la forme du produit $c\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)\prod_{j=1}^{n}(x-\beta_j)^{-1}$. Si tous les α_i appartenaient à $\varrho(A)$, alors l'opérateur $r(A)-\mu\cdot 1$ admettrait pour opérateur

inverse l'opérateur $c^{-1}\prod_{i=1}^{m} r_{\alpha_i}(A)\prod_{j=1}^{n}(A-\beta_j\cdot 1)$, ce qui est absurde. Donc, l'un des nombres α_i appartient au spectre de A. Mais alors $r(\alpha_i)-\mu = 0$, c'est-à-dire $\mu \in r(\sigma(A))$. Nous avons démontré la proposition 1). La proposition 2) découle de l'égalité $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, qui entraîne

$$r_\lambda(A^*) = r_{\bar\lambda}(A)^*.$$

Théorème 4. *Soit A un opérateur auto-adjoint. Alors*

1) *le spectre de A est situé sur l'intervalle* $[-\|A\|, \|A\|]$;

2) *pour toute fonction rationnelle r, dont les pôles sont extérieurs à $\sigma(A)$, on a*

$$\|r(A)\| = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |r(\lambda)|. \tag{12}$$

Démonstration. Soit λ un nombre non réel. Montrons que $r_\lambda(A)$ existe. L'opérateur $A-\lambda 1$ ne possède pas de noyau, puisque si x est un vecteur unitaire de $\ker(A-\lambda 1)$, alors $\lambda = (Ax, x) = (x, Ax) = \bar\lambda$, ce qui est faux. D'autre part, l'image de l'opérateur $A-\lambda 1$ est dense dans H, puisque $\operatorname{im}(A-\lambda 1)^\perp = \ker(A-\lambda 1)^* = \ker(A-\bar\lambda 1) = 0$. Montrons que l'opérateur $(A-\lambda 1)^{-1}$ défini sur $\operatorname{im}(A-\lambda 1)$ est borné. Soit $\lambda = \alpha+i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda 1)x\|^2 &= ((A-\alpha 1)x-i\beta x, (A-\alpha 1)x-i\beta x) = \\ &= \|(A-\alpha 1)x\|^2+\beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

D'où $\|A-\lambda 1\|^{-1} \leqslant \beta^{-1}$ et $r(A)$ s'obtient par prolongement par continuité. (En effet, on peut vérifier que cette minoration entraîne que $\operatorname{im}(A-\lambda 1) = H$.)

Donc, $\sigma(A)$ est contenu dans la droite réelle. La proposition 1) résulte maintenant de ce que $\sigma(A)$ est situé dans un disque de rayon $\|A\|$ (voir démonstration du théorème 2).

Commençons la démonstration de la proposition 2) pour le cas où $r(x) \equiv x$. Alors 2) se ramène à l'égalité

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{13}$$

La quantité du second membre s'appelle *rayon spectral* de l'opérateur A et se note $r(A)$. On a le

Lemme. *Pour tout opérateur borné A on a*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}; \tag{14}$$

si A est un opérateur auto-adjoint, alors $r(A) = \|A\|$.

Démonstration. L'existence de la limite du second membre de l'égalité (14) résulte des propriétés générales des suites sous-additives (voir exercice 725). D'autre part, le développement de la résolvante en série de Laurent au voisinage d'un point infini est donné par la formule (7). D'après la formule d'Hadamard, le rayon de convergence de cette série (visiblement égal à $r(A)$) est relié aux coefficients de la relation (14) cherchée. (Nous utilisons ici la formule d'Hadamard pour une fonction analytique opérato-

rielle. Il est immédiat de vérifier que cette formule vaut intégralement pour ce cas.) Pour tout opérateur A on a

$$||A^*A|| = \sup(A^*Ax, y) = \sup \frac{(Ax, Ay)}{||x||\,||y||} = ||A||^2.$$

En particulier, pour l'opérateur auto-adjoint A : $||A^2|| = ||A||^2$. Donc $||A^{2^n}|| = ||A||^{2^n}$ et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} = ||A||$, c.q.f.d.

Revenons à la démonstration de la proposition 2) dans le cas général. Soit $B = r(A)$. Alors $B^* = \bar{r}(A)$ (par $\bar{r}$ on désigne la fonction $\bar{r}(z) = \overline{r(\bar{z})}$; on vérifie immédiatement que $\bar{r}$ est une fonction rationnelle dont les coefficients sont conjugués complexes de ceux de r). En appliquant la proposition déjà prouvée à l'opérateur auto-adjoint $B^*B = |r|^2(A)$, on obtient

$$||B||^2 = ||B^*B|| = r(B^*B) = \sup_{\mu \in \sigma(B^*B)} (\mu) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |r(\lambda)|^2$$

(la dernière relation résulte de la proposition 1) du théorème 3), c.q.f.d.

Corollaire. *Dans un espace hilbertien H, il existe pour tout opérateur auto-adjoint A un homomorphisme continu unique φ de l'algèbre $C[-a, a]$, où $a = ||A||$, dans l'algèbre des opérateurs bornés dans H, possédant les propriétés suivantes :*

1) $\varphi(1) = 1$ *(dans le premier membre* 1 *représente la fonction identiquement égale à* 1, *dans le second, l'opérateur identité dans H)* ;

2) $\varphi(f) = \varphi(\bar{f})^*$;

3) $\varphi(x) = A$;

4) $||\varphi(f)|| \leqslant ||f||_{C[-a,a]}$.

De plus,

5) *si $AB = BA$, alors $\varphi(f)B = B\varphi(f)$.* (Une autre déduction de cette proposition est accessible dans les exercices 748, 749.)

Nous allons maintenant prolonger l'homomorphisme φ à l'algèbre $B[-a, a]$ des fonctions boréliennes bornées sur l'intervalle $[-a, a]$.

Théorème 5. *Soit A un opérateur auto-adjoint borné dans un espace hilbertien H. Il existe un homomorphisme unique φ de l'algèbre $B[-a, a]$ des fonctions boréliennes bornées sur l'intervalle $[-a, a]$ où $a = ||A||$, possédant les propriétés suivantes :*

1) $\varphi(1) = 1$;

2) $\varphi(x) = A$;

3) *si $f_n(x) \leqslant C$ et $f_n(t) \to f(t)$ en tout point $t \in [-a, a]$, alors $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$.*

L'homomorphisme φ possède de plus les propriétés :

4) $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$;

5) $||\varphi(f)|| \leqslant \sup|f(t)|$, $t \in [-a, a]$;

6) $\varphi(f)B = B\varphi(f)$ *pour tout opérateur B commutant avec A.*

Démonstration. L'homomorphisme φ est déjà défini sur l'ensemble $C[-a, a]$. Les fonctions boréliennes s'obtiennent à partir des fonctions continues par des passages à la limite ponctuels ; ceci entraîne l'unicité de l'homomorphisme cherché φ. Prouvons son existence. Soient $x, y \in H$. Définissons une fonctionnelle linéaire $F_{x,y}$ sur $C[-a, a]$ par la formule

$$F_{x,y}(f) = (\varphi(f)x, y). \tag{15}$$

Comme $|F_{x,y}(f)| \leqslant \|\varphi(f)\| \, \|x\| \, \|y\| \leqslant \|f\|_{C[-a,a]} \|x\| \, \|y\|$, alors $F_{x,y}$ est une fonctionnelle continue dont la norme est $\leqslant \|x\| \, \|y\|$. Il existe donc une charge borélienne $\nu_{x,y}$ sur $[-a, a]$, telle que

$$F_{x,y}(f) = \int_{-a}^{a} f(t)\, d\nu_{x,y}(t), \tag{16}$$

de plus $\operatorname{Var}_{-a}^{a} \nu \leqslant \|x\| \, \|y\|$. Supposons maintenant que f est une fonction borélienne bornée sur l'intervalle $[-a, a]$. La quantité $Bf(x, y) = \int_{-a}^{a} f(t)\, d\nu_{x,y}(t)$ dépend linéairement de x, antilinéairement de y et vérifie la majoration $|Bf(x, y)| \leqslant \sup_{t \in [-a,a]} |f(t)| \, \|x\| \, \|y\|$. D'où il résulte qu'il existe un opérateur borné $\varphi(f)$ tel que $Bf(x, y) = (\varphi(f)x, y)$, et de plus $\|\varphi(f)\| \leqslant \sup |f(t)|$, $t \in [-a, a]$. Supposons que $f_n(t) \to f(t)$ pour $t \in [-a, a]$. Alors, pour tous x et y de H, on a

$$(\varphi(f_n)x, y) = \int_{-a}^{a} f_n(t)\, d\nu_{x,y}(t) \to \int_{-a}^{a} f(t)\, d\nu_{x,y}(t) = (\varphi(f)x, y).$$

Donc $\varphi(f_n)$ converge faiblement vers $\varphi(f)$. D'où il s'ensuit que l'application φ est un homomorphisme. En effet, les égalités

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g),$$
$$\varphi(fg) = \varphi(f)\,\varphi(g)$$

sont valables lorsque f et g appartiennent à $C[-a, a]$ et se conservent par des passages à la limite ponctuels. En reprenant ce raisonnement on s'assure que φ possède la propriété 4). Nous sommes maintenant en mesure de prouver la propriété 3). Supposons que $f_n(t) \to f(t)$ pour tous les $t \in [-a, a]$ et $|f_n(t)| \leqslant C$. Alors $|f_n - f|^2(t) \to 0$ pour tous les $t \in [-a, a]$. Donc $\varphi(|f_n - f|^2) \to 0$. D'où $\|\varphi(f_n - f)x\|^2 = (\varphi(f_n - f)^* \varphi(f_n - f)x, x) = (\varphi(|f_n - f|^2)x, x) \to 0$, c.q.f.d.

Exemple fondamental. Supposons que $H = L_2(X, \mu)$, A, l'opérateur de multiplication par la fonction $a \in L_\infty(X, \mu)$. Dans ce cas $\varphi(f)$ est un opérateur de multiplication par la fonction $f(a(x))$. L'universalité de cet exemple apparaîtra plus bas.

Le calcul fonctionnel proposé dans le théorème 5 admet la généralisation intéressante suivante.

Théorème 6. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des opérateurs auto-adjoints bornés commutant deux à deux dans un espace hilbertien H, T, un parallélipipède*

dans $\mathbf{R}^n$, *défini par* $|t_i| \leqslant \|A_i\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Il existe un homomorphisme unique* φ *de l'algèbre* $B(T)$ *des fonctions boréliennes bornées sur* T *dans l'algèbre des opérateurs bornés dans* H, *possédant les propriétés suivantes :*

1) $\varphi(1) = 1$;

2) $\varphi(t_i) = A_i$;

3) *si* $|f_k(t)| \leqslant C$ *et* $f_k(t) \to f(t)$ *pour tous les* $t \in T$, *alors* $\varphi(f_k) \to \varphi(f)$ *pour la topologie opératorielle forte.*

L'homomorphisme φ *possède de plus les propriétés :*

4) $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$;

5) $\|\varphi(f)\| \leqslant \sup_{t \in T} f(t)$;

6) $\varphi(f)B = B\varphi(f)$ *pour tout opérateur* B *commutant avec* $A_1, \ldots, A_n$.

Démonstration. Soit $B_k(T)$ la sous-algèbre de $B(T)$ composée des fonctions dépendant de la coordonnée t_k. Alors la restriction de φ à $B_k(T)$ est confondue avec l'homomorphisme φ_k qui correspond d'après le théorème 5 à l'opérateur A_k. Désignons par $B_0(T)$ la sous-algèbre des fonctions en escalier sur T, c'est-à-dire des fonctions de la forme $f(t) = \sum c_{k_1} \ldots c_{k_n} \chi_{E_1}(t_1) \ldots \chi_{E_n}(t_n)$. Si l'homomorphisme cherché φ existe, d'après ce qui a été dit plus haut il doit être défini sur la fonction en escalier f par la formule

$$\varphi(f) = \sum c_{k_1 \ldots k_n} \varphi_1(\chi_{E_1}) \ldots \varphi_k(\chi_{E_n}). \tag{17}$$

D'où l'unicité de φ sur $B_0(T)$, donc sur $B(T)$ d'après la propriété 3).

Prouvons son existence. Nous avons défini l'application φ sur la sous-algèbre $B_0(t)$ par la formule (17). Comme $A_1, \ldots, A_n$ commutent deux à deux, il en est de même des opérateurs $\varphi_1(f_1), \varphi_2(f_2), \ldots, \varphi_n(f_n)$ (proposition 6) du théorème 5). Donc l'application φ est un homomorphisme. D'autre part, l'homomorphisme φ envoie les fonctions positives dans des opérateurs positifs, car si $f \geqslant 0$, alors $f = g^2$ pour une fonction réelle $g \in B_0(T)$, donc $\varphi(f) = \varphi(g)^2 \geqslant 0$. D'où la propriété 5) (voir exercice 749). Donc, l'homomorphisme φ se prolonge à l'algèbre $C(T)$ des fonctions continues sur T et possède la propriété 5). La conclusion du théorème résulte comme celle du théorème 5 du corollaire du théorème 4.

Voici une proposition utile.

Corollaire. *Soient* A *un opérateur normal dans un espace hilbertien* H, T *le carré du plan complexe centré en* 0 *et de côté* $2\|A\|$. *Il existe un homomorphisme unique de l'algèbre* $B(T)$ *des fonctions boréliennes bornées sur* T *dans l'algèbre des opérateurs dans* H, *possédant les propriétés suivantes :*

1) $\varphi(1) = 1$;

2) $\varphi(x+iy) = A$;

3) $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$;

4) *si* $|f_n| \leqslant C$ et $f_n(t) \to f$ pour $t \in T$ *alors* $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$.

De plus :

5) $||\varphi(f)|| \leqslant \sup |f(t)|$;

6) $\varphi(f)B = B\varphi(f)$ *pour tout opérateur* B *commutant avec* A *et* A^*.

En effet, si A est un opérateur normal, alors $A = B+iC$, où B et C sont des opérateurs auto-adjoints bornés dont la norme est $\leqslant ||A||$. Les conditions 2) et 3) entraînent la condition 2) et $\varphi(x) = B, \varphi(y) = C$. Le corollaire résulte maintenant du théorème 6) appliqué aux opérateurs B et C.

3. Opérateurs auto-adjoints non bornés. Dans les applications on a souvent affaire à des opérateurs A définis non pas sur un espace hilbertien H tout entier, mais sur un de ses sous-espaces dense non fermé $\mathcal{D}_A$. Pour un tel opérateur on peut définir l'opérateur adjoint A^*, qui peut non plus ne pas être partout défini et borné. Plus exactement, le domaine de définition de A^* est le sous-ensemble $\mathcal{D}_{A^*}$ (généralement pas fermé) constitué des vecteurs $y \in H$ pour lesquels la fonctionnelle linéaire $x \mapsto (Ax, y)$ est bornée sur $\mathcal{D}_A$. Dans ce cas, elle se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire à H et peut être écrite sous la forme $x \mapsto (x, z)$, $z \in H$. On admet que $A^*y = z$. Donc l'égalité

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \tag{18}$$

qui définit A^* pour les opérateurs bornés A est maintenant valable uniquement pour les $x \in \mathcal{D}_A$, $y \in \mathcal{D}_{A^*}$.

On peut donner une définition plus « géométrique » de A^*. On remarquera pour cela que tout opérateur A (y compris les opérateurs non partout définis et non bornés) est défini par son *graphe*, c'est-à-dire par un sous-ensemble $\Gamma_A \subset H \oplus H$, composé des vecteurs de la forme $x \oplus Ax$, $x \in \mathcal{D}_A$. Il est évident que Γ_A est un sous-espace vectoriel de $H \oplus H$, ne contenant pas de vecteurs de la forme $0 \oplus x$, $x \neq 0$. Inversement, tout sous-espace de $H \oplus H$ ne contenant pas de vecteurs de la forme $0 \oplus x$, $x \neq 0$, est graphe d'un certain opérateur.

Désignons par τ la transformation de $H \oplus H$ qui à tout vecteur $x \oplus y$ associe le vecteur $-y \oplus x$ (rotation de 90°).

Théorème 7. *Les graphes des opérateurs* A *et* A^* *sont reliés par la relation*

$$\Gamma_{A^*} = \tau(\Gamma_A)^{\perp}. \tag{19}$$

Démonstration. Soit $y \oplus z \in \Gamma_{A^*}$. Autrement dit, $(Ax, y) = (x, z)$ est réalisée pour tous les $x \in \mathcal{D}_A$ (voir (18)). Cette relation n'est rien d'autre que la condition d'orthogonalité des vecteurs $y \oplus z$ et $-Ax \oplus x$ dans $H \oplus H$, c.q.f.d.

On dit qu'un opérateur A est *fermé* si le sous-espace Γ_A est fermé dans $H \oplus H$. On dit qu'un opérateur B est la *fermeture* d'un opérateur A si Γ_B est l'adhérence du sous-espace Γ_A. On dit que B est *l'extension* de A et l'on note $B \supset A$ si $\Gamma_B \supset \Gamma_A$. Le théorème 7 entraîne le

Corollaire. *Pour tout opérateur* A, *l'opérateur* A^* *est fermé et l'opérateur* $(A^*)^*$ *(s'il est défini) est confondu avec la fermeture de* A.

Remarque. Les opérateurs n'admettent pas tous une fermeture. Par exemple, l'opérateur A défini sur l'ensemble des suites à support borné dans $l_2(\mathbf{R})$ et appliquant e_n dans ne_1, $n = 1, 2, \ldots$, ne possède pas de fermeture, puisque le point $0 \oplus e_1$ est un point limite de son graphe. Vérifier que l'opérateur A^* est défini sur le sous-espace $\{e_1\}^\perp$ qui n'est pas dense dans $l_2(\mathbf{R})$.

Un opérateur A est dit auto-adjoint si

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*} \tag{20}$$

et $A = A^*$ sur $\mathcal{D}_A$.

Avertissement. Cette propriété n'est pas équivalente à la condition plus faible

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{pour} \quad x, y \in \mathcal{D}_A. \tag{21}$$

Les opérateurs possédant la propriété (21) s'appellent *symétriques*. Il est évident que (21) est équivalent à l'inclusion $A \subset A^*$.

Un opérateur A est dit *essentiellement auto-adjoint* si sa fermeture est un opérateur auto-adjoint.

Exemples. 1) Soit A l'opérateur de multiplication par x dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$ défini sur $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Trouvons $\mathcal{D}_{A^*}$. Par définition, pour $f \in \mathcal{D}_{A^*}$ on doit avoir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{g(x)}\, dx,$$

où

$$g = A^* f, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

Comme $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ est dense dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$, il s'ensuit de là que $g(x) = xf(x)$. Donc, $\mathcal{D}_{A^*}$ est constitué de tous les $f \in L_2(\mathbf{R}, dx)$ tels que $xf(x) \in L_2(\mathbf{R}, dx)$. L'opérateur A^* est un opérateur de multiplication par x. Conclusion : l'opérateur A est symétrique mais pas auto-adjoint. On vérifie que A^* est auto-adjoint, donc A est essentiellement auto-adjoint.

2) Soit A l'opérateur de dérivation d/dx dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$ défini sur $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Trouvons $\mathcal{D}_{A^*}$. Si $f \in \mathcal{D}_{A^*}$, alors pour tous les $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \overline{f(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{g(x)}\, dx, \quad \text{où} \quad g = A^* f.$$

Cette égalité montre que $g(x)$ est une dérivée distributionnelle de la fonction $-f(x)$. Donc $\mathcal{D}_{A^*}$ est composé des fonctions $f \in L_2(\mathbf{R}, dx)$ dont la dérivée distributionnelle appartient à $L_2(\mathbf{R}, dx)$. L'opérateur A^* est confondu avec $-d/dx$.

Dans les applications, l'opérateur A est souvent donné par une expression différentielle. Dans ce cas, il admet un *domaine de définition naturel* $\mathcal{D}_A \subset L_2(\Omega, d\mu)$, plus exactement l'ensemble de toutes les distributions $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pour lesquelles f et Af appartiennent à $L_2(\Omega, d\mu)$. Dans les exemples cités plus haut, les opérateurs A^* avaient précisément un domaine de définition naturel.

La théorie des opérateurs auto-adjoints est bien élaborée. Pour s'en servir dans les applications il faut savoir si tel ou tel opérateur est auto-adjoint ou tout au moins essentiellement auto-adjoint. Une condition nécessaire à cela est la symétrie qui, en principe, se vérifie sans peine. Voici un critère utile pour étudier les opérateurs symétriques.

Théorème 8. *Soit A un opérateur symétrique dans un espace hilbertien H. Alors dire que A est auto-adjoint est équivalent à l'une des conditions suivantes :*

1) *A est fermé et* $\ker(A^* \pm i1) = \{0\}$;

2) $\operatorname{im}(A \pm i1) = H$.

Dire que A est essentiellement auto-adjoint est équivalent à l'une des conditions suivantes :

3) $\ker(A^* \pm i1) = \{0\}$;

4) $\operatorname{im}(A \pm i1)$ *est dense dans H.*

Démonstration. Si A est un opérateur auto-adjoint, il est fermé (puisque $A = A^*$ et A^* est fermé). Si $x \in \ker(A^* \pm i1)$, alors $Ax = ix$. D'où $(Ax, x) = i\|x\|^2 = (x, Ax) = -i\|x\|^2$, c'est-à-dire $x = 0$. Nous avons prouvé 1) pour l'opérateur auto-adjoint A. Montrons que 1) entraîne 2). Remarquons tout d'abord que $\operatorname{im}(A \pm i1)^\perp = \ker(A^* \mp i1)$. Donc de 1) il s'ensuit que $\operatorname{im}(A \pm i1)$ est dense dans H. Utilisons le fait que A est fermé. Soient y un vecteur quelconque de H, $\{x_n\}$, une suite de $\mathcal{D}_A$ pour laquelle $(A \pm i1) \times x_n \to y$. La suite $\{(A \pm i1)x_n\}$ est fondamentale. La relation $\|(A \pm i1)x\|^2 = (Ax \pm ix, Ax \pm ix) = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \geqslant \|x\|^2$ montre que $\{x_n\}$ est aussi une suite fondamentale. Supposons que $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Alors $x \oplus y \in \Gamma_{A \pm i1}$, donc $y \in \operatorname{im}(A \pm i1)$.

Montrons maintenant que 2) entraîne que A est auto-adjoint. Comme $A \subset A^*$, il suffit de vérifier que $\mathcal{D}_{A^*} \subset \mathcal{D}_A$. Soit $y \in \mathcal{D}_{A^*}$. Comme $\operatorname{im}(A \pm i1) = H$, il existe des vecteurs $x_\pm \in \mathcal{D}_A$, tels que $(A \pm i1)x_\pm = (A^* \pm i1)y$. L'opérateur A^* est défini et coïncide avec A sur le sous-espace $\mathcal{D}_A$. Donc $(A^* \pm i1)(y - x_\pm) = 0$. Or, $\ker(A^* \pm i1) = \operatorname{im}(A \mp i1)^\perp = 0$. Donc $y = x_\pm$ et $y \in \mathcal{D}_A$.

Supposons maintenant que A est essentiellement auto-adjoint. Alors A^* est confondu avec la fermeture de A (exercice 764), et par suite est auto-adjoint. D'où l'on déduit 3) d'après la partie déjà démontrée du théorème. D'autre part de 4) il s'ensuit 3) (exercice 778). Montrons maintenant à partir de la condition 3) que $\bar{A}$ est auto-adjoint. L'opérateur A étant symétrique, il vient $A \subset A^*$. Ceci montre que A admet la fermeture $\bar{A}$ et que $\bar{A} \subset A^*$ (puisque A^* est un opérateur fermé). Du théorème 7, il résulte que $\bar{A}^* = A^*$. Donc, l'opérateur $\bar{A}$ satisfait aux conditions 1). Par suite $\bar{A}$ est auto-adjoint et A est essentiellement auto-adjoint.

Exemple. Soient $A = i\dfrac{d}{dx}$, $H = L_2(\mathbf{R}, dx)$, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}(\mathbf{R})$. La symétrie de A résulte de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\overline{\psi(x)}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\psi'(x)}\,dx, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

On a vu plus haut que l'opérateur adjoint A^* est défini sur l'ensemble $\mathcal{D}_{A^*} \subset L_2(\mathbf{R}, dx)$, constitué des fonctions dont la dérivée distributionnelle appartient à $L_2(\mathbf{R}, dx)$, et est égale à id/dx. Trouvons $\ker(A^* \pm i1)$. Si $(A^* \pm i1)f = 0$, c'est-à-dire $i(f' \pm f) = 0$, alors $f = ce^{\pm x}$ (exercice 523). Comme ces fonctions n'appartiennent pas à $L_2(\mathbf{R}, dx)$, il vient que $\ker(A^* \pm i1) = \{0\}$. Donc A est essentiellement auto-adjoint.

Soient A un opérateur non borné, B, un opérateur borné. On dit que A et B commutent si B applique $\mathcal{D}_A$ dans lui-même et $BAx = ABx$ pour $x \in \mathcal{D}_A$. On montre que pour un opérateur auto-adjoint A cette condition équivaut à la commutation de B avec l'un quelconque des opérateurs bornés $(A \pm i1)^{-1}$.

§ 2. Décomposition spectrale des opérateurs

1. Réduction d'un opérateur à la multiplication par une fonction. On se propose de montrer ici que tout opérateur auto-adjoint est unitairement équivalent à un opérateur de multiplication. De façon plus précise, on a le

Théorème 9. *Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace hilbertien H. Il existe un espace X muni d'une mesure, une fonction mesurable a sur X et un opérateur unitaire U de H dans $L_2(X, \mu)$, tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_A & \xrightarrow{U} & \mathcal{D}_{M(a)} \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M(a)} \\ H & \xrightarrow{U} & L_2(X, \mu) \end{array} \tag{22}$$

($M(a)$ est l'opérateur de multiplication par une fonction a dans $L_2(X, \mu)$, dont le domaine de définition $\mathcal{D}_{M(a)}$ est constitué des fonctions $f \in L_2(X, \mu)$ pour lesquelles $af \in L_2(X, \mu)$.)

Nous ferons la démonstration de ce théorème en plusieurs étapes. Supposons tout d'abord que l'opérateur A est borné et que dans l'espace H il existe un *vecteur cyclique* pour A, c'est-à-dire un vecteur ξ tel que tout sous-espace fermé de H contenant ξ et invariant par A, est confondu avec H (voir exercice 715). Dans ce cas, on dira que l'opérateur A est un *opérateur à spectre simple* (comparer avec l'exercice 716).

Théorème 10. *Soit A un opérateur auto-adjoint borné à spectre simple. Alors A est justiciable de la proposition du théorème 9 et de plus on peut poser $X = [-\|A\|, \|A\|]$, $a(x) = x$, $U\xi(x) \equiv 1$.*

Démonstration. Supposons que le théorème a été prouvé et que μ est la mesure cherchée sur X. Soit f une fonction borélienne bornée sur X. Alors du théorème 5 il s'ensuit qu'à l'opérateur $f(A)$ dans H est associé l'opérateur de multiplication par $f(x)$ dans $L_2(X, \mu)$, c'est-à-dire

$$Uf(A) = M(f)U. \tag{23}$$

En effet, pour $f(x) = x$, la relation (23) se ramène à (22) et l'on obtient le cas général à partir de la construction de l'opérateur $f(A)$.

De là on déduit que

$$(f(A)\xi, \xi)_H = (Uf(A)\xi, U\xi)_{L_2(X,\mu)} = (f, 1)_{L_2(X,\mu)}. \tag{24}$$

On peut calculer le premier membre de (24) si l'on connaît seulement l'opérateur A et le vecteur ξ. Ce faisant, on obtient la mesure μ. Plus exactement, si E est un sous-ensemble mesurable de X et χ_E est la fonction caractéristique de E, alors

$$\mu(E) = (\chi_E, 1)_{L_2(X,\mu)} = (\chi_E(A)\xi, \xi)_H. \tag{25}$$

Soit donné maintenant un opérateur auto-adjoint A à spectre simple dans l'espace H et soit ξ un vecteur cyclique pour A. Définissons la fonction μ sur les boréliens de l'intervalle $X = [-\|A\|, \|A\|]$ par la formule (25). Vérifions que μ est une mesure σ-additive. Tout d'abord des égalités $\chi_E = \chi_E^2 = \bar{\chi}_E$ il s'ensuit que l'opérateur $\chi_E(A)$ est un orthoprojecteur. Donc $(\chi_E(A)\xi, \xi) = \|\chi_E(A)\xi\|^2 \geqslant 0$. D'autre part, si $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$, alors $\chi_E = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}$ (la série converge en chaque point). Donc $\chi_E(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(A)$ (au sens de la convergence forte), et par suite $\mu(A) = (\chi_E(A)\xi, \xi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(A)\xi, \xi\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$. Définissons maintenant un opérateur U de H dans $L_2(X, \mu)$ sur les vecteurs de la forme $f(A)\xi$ comme suit :

$$Uf(A)\xi = f. \tag{26}$$

Vérifions que cet opérateur est isométrique, c'est-à-dire

$$(Uf_1(A)\xi, Uf_2(A)\xi)_{L_2(X,\mu)} = (f_1(A)\xi, f_2(A)\xi)_H. \tag{27}$$

Si $f_1 = \chi_{E_1}$, $f_2 = \chi_{E_2}$, alors (27) se ramène à l'égalité $(\chi_{E_1}, \chi_{E_2})_{L_2(X,\mu)} = (\chi_{E_1}(A)\xi, \chi_{E_2}(A)\xi)_H = (\chi_{E_1}(A)\chi_{E_2}(A)\xi, \xi)_H$, qui est valable par définition de la mesure μ. Le produit scalaire étant linéaire l'égalité (27) est aussi valable pour les fonctions en escalier f_1 et f_2. Enfin, cette égalité est préservée par les passages à la limite ponctuels bornés. Ce qui démontre que U est isométrique. Comme les vecteurs de la forme $f(A)\xi$ sont denses dans H (ils forment un espace vectoriel contenant ξ et invariant par A) et les fonctions f, denses dans $L_2(X, \mu)$, l'opérateur U se prolonge en un opérateur unitaire de H à $L_2(X, \mu)$. Enfin, en désignant $xf(x)$ par $g(x)$ on obtient par définition

$$UAf(A)\xi = Ug(A)\xi = g = M(x)f = M(x)\,Uf(A)\xi.$$

D'où $UA = M(x)U$ sur les vecteurs de la forme $f(A)\xi$, donc partout, c.q.f.d.

Supposons maintenant que le vecteur ξ n'est pas cyclique.

Théorème 11. *Soit A un opérateur auto-adjoint borné dans un espace hilbertien H. Il existe une famille de sous-espaces $\{H_\beta\}_{\beta \in B}$ dans H possédant les propriétés suivantes :*

1) $H_\beta \perp H_{\beta'}$ *pour* $\beta \neq \beta'$;

2) $\sum_{\beta \in B} H_\beta = H$;

3) $AH_\beta \subset H_\beta$ *pour tous les* $\beta \in B$;

4) *la restriction de* A *à* H_β *admet un vecteur cyclique pour tout* $\beta \in B$.

La démonstration résulte immédiatement du lemme de Zorn appliqué à l'ensemble de tous les systèmes $\{H_\beta\}$ possédant les propriétés 1), 3), 4). On remarquera aussi que si H est séparable, alors l'ensemble B est au plus dénombrable. Les théorèmes 10 et 11 nous disent que le théorème 9 est valable pour tout opérateur auto-adjoint borné A avec la précision suivante : pour ensemble X on peut prendre la réunion de quelques exemplaires de l'intervalle $[-\|A\|, \|A\|]$ et pour fonction $a(x)$ la fonction coordonnée x.

Nous laissons au lecteur le soin de déduire un résultat plus général en s'inspirant du schéma exposé plus haut.

Théorème 12. *Soient* $A_1, \ldots, A_n$ *des opérateurs auto-adjoints bornés commutant deux à deux dans un espace hilbertien* H. *Il existe une réalisation de* H *sous forme de l'espace* $L_2(X, \mu)$ *telle que tous les opérateurs* $A_1, \ldots, A_n$ *soient simultanément des opérateurs de multiplication par des fonctions réelles* $a_1(x), \ldots, a_n(x) \in L_\infty(X, \mu)$.

Corollaire. *Soit* A *un opérateur normal borné (en particulier unitaire) dans un espace hilbertien complexe* H. *Il existe une réalisation de* H *sous forme de l'espace* $L_2(X, \mu)$ *pour laquelle l'opérateur* A *se transforme en l'opérateur de multiplication par une fonction à valeurs complexes* $a \in L_\infty(X, \mu)$ *(dans le cas d'un opérateur unitaire* $|a(x)| = 1$ *presque partout sur* X*).*

En effet, l'opérateur A est de la forme $B+iC$, où B et C sont des opérateurs auto-adjoints bornés qui commutent. En leur appliquant le théorème 12 on obtient la proposition annoncée. Si l'opérateur A est unitaire, alors $AA^* = 1$, d'où $|a(x)|^2 = 1$ presque partout.

Traitons maintenant le cas d'un opérateur auto-adjoint non borné A dans l'espace H. Construisons l'opérateur auxiliaire $V = (A+i1)(A-i1)^{-1}$. On remarquera pour cela que $\operatorname{im}(A-i1) = H$ d'après le théorème 8. Donc, pour tout $x \in H$, il existe un $y \in \mathcal{D}_A$ tel que $x = Ay-iy$. Posons $Vx = Ay+iy$. L'image de l'opérateur $A + i1$ est confondue avec H d'après le même théorème, donc $\operatorname{im} V = H$. Enfin, l'égalité $\|Ay-iy\|^2 = (Ay-iy, Ay-iy) = (Ay, Ay)+(y, y) = \|Ay+iy\|^2$ montre que V est une isométrie. Donc, l'opérateur V est unitaire. D'après le corollaire du théorème 12, il existe une réalisation de l'espace H sous forme de $L_2(X, \mu)$ telle que V se transforme en l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable $v(x)$ telle que $|v(x)| = 1$ presque partout sur X.

Montrons maintenant que $v(x)$ prend des valeurs différentes de 1 presque partout. Sinon l'opérateur V admettrait un vecteur propre x_0 associé à la valeur propre 1 (telle est dans notre réalisation toute fonction différente de 0 uniquement sur l'ensemble où $v(x) = 1$). L'égalité $Vx_0 = x_0$ équivaut à l'égalité $Ay_0-iy_0 = Ay_0+iy_0$, d'où $y_0 = 0$ et par suite $x_0 = 0$. Donc

$v(x) \neq 1$ presque partout. Par suite, il existe une fonction mesurable réelle $a(x)$ telle que $v(x) = \frac{a(x)+i}{a(x)-i}$ presque partout ; il suffit de poser $a(x) = i\frac{v(x)+1}{v(x)-1}$. Prouvons enfin que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{(V-1)^{-1}}$ et $A = i(V+1)(V-1)^{-1}$. D'où il résultera que dans notre réalisation A est un opérateur de multiplication par $a(x)$.

Par définition de V on a $(V+1)x = Vx+x = Ay+iy+Ay-iy = 2Ay$, $(V-1)x = Vx-x = Ay+iy-Ay+iy = 2iy$. D'où $\mathcal{D}_{(V-1)^{-1}} = \operatorname{im}(V-1) = \mathcal{D}_A$ et $Ay = \frac{1}{2}(V+1)x = i(V+1)(V-1)y$, c.q.f.d.

Une conséquence de ce théorème est la généralisation suivante des résultats du n° 2 § 1.

Théorème 13. *Soit A un opérateur auto-adjoint (éventuellement non borné) dans un espace hilbertien H. Il existe un homomorphisme unique de l'algèbre $B(\mathbf{R})$ des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbf{R}$ dans l'algèbre* End H *dans H possédant les propriétés suivantes :*

1) $\varphi(1) = 1$;

(2) $\varphi\left(\frac{t+i}{t-i}\right) = (A+i1)(A-i1)^{-1}$;

3) *si $|f_n(t)| \leqslant C$ et $f_n(t) \to f(t)$ pour tous les $t \in \mathbf{R}$, alors $\varphi(f_n)$ converge fortement vers $\varphi(f)$.*

De plus,

4) $\varphi(f) = \varphi(f)^*$;

5) $\|\varphi(f)\| \leqslant \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$.

Démonstration. On admettra que H est réalisé sous la forme de $L_2(X, \mu)$ de telle sorte que l'opérateur A est un opérateur de multiplication par une fonction réelle mesurable $a(x)$. Alors l'opérateur $V = (A+i1)(A-i1)^{-1}$ est un opérateur de multiplication par $v(x) = \frac{a(x)+i}{a(x)-i}$. Définissons l'homomorphisme φ cherché par la formule $\varphi(f) = M(f \circ a)$, où $M(f \circ a)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $f(a(x))$. Les propriétés 1) à 5) se vérifient sans peine. Prouvons l'unicité de φ. De 2) il s'ensuit que $\varphi\left(\frac{t-i}{t+i}\right) = \varphi\left(\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{-1}\right) = V^{-1} = V^*$. D'où $\varphi\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \operatorname{Re} V$, $\varphi\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) = \operatorname{Im} V$, où $\operatorname{Re} V = \frac{V+V^*}{2}$, $\operatorname{Im} V = \frac{V-V^*}{2i}$. Donc φ est défini de façon unique sur les fonctions rationnelles de la forme $P\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$, où P est un polynôme de deux variables. En se servant du théorème de Weierstrass on peut démontrer que de telles fonctions approchent uniformément toute fonction continue sur la droite pour laquelle existent et sont égales entre elles les limites finies de $f(t)$ pour $t \to \pm\infty$ *). Enfin, de proche en proche,

*) Il suffit de se servir du changement de variables

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} \to \cos\alpha, \qquad \frac{2t}{t^2+1} \to \sin\alpha.$$

par des passages à la limite ponctuels bornés sur $f(t)$ on peut obtenir toute fonction de $B(\mathbf{R})$, c.q.f.d.

2. Théorème spectral. De nombreux résultats de la théorie de la mesure (voir chapitre II) s'étendent mutatis mutandis au cas où l'on envisage des mesures projectives à la place des mesures usuelles.

Définition. Soient donnés un ensemble X, une σ-algèbre B de parties de X, contenant X et un ensemble hilbertien H. L'application $\lambda : B \to \operatorname{End} H$ s'appelle *mesure projective* sur (X, B) à valeurs dans $\operatorname{End} H$ si sont réalisées les conditions suivantes :

1) $\lambda(E) = \lambda(E)^*$ pour tout $E \in B$;

2) $\lambda(E_1) \cap E_2) = \lambda(E_1)\,\lambda(E_2)$ pour tous $E_1, E_2 \in B$;

3) $\lambda(E_1 \cup E_2) = \lambda(E_1) + \lambda_2(E_2)$ pour $E_1, E_2 \in B$ disjoints quelconques ;

4) si $E_n \in B$ et existe $\lim\limits_{n \to \infty} E_n = E$ (voir exercice 81), alors $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} \lambda(E_n)$ existe et vaut $\lambda(E)$.

Exemple. Supposons que (X, B, μ) est un espace muni d'une mesure σ-additive ordinaire μ. Posons $H = L_2(X, \mu)$, $\lambda(E) = M(\chi_E)$ un opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de l'ensemble $E \subset B$. Les propriétés 1) à 3) sont évidentes, 4) résulte du théorème de Lebesgue de convergence bornée.

Discutons quelques propriétés des mesures projectives résultant de la définition donnée plus haut. De la condition 2) il s'ensuit que les opérateurs $\lambda(E), E \in B$ commutent deux à deux. D'autre part la condition 1) et l'égalité $\lambda(E)^2 = \lambda(E)$ qui résulte de 2), montrent que $\lambda(E)$ est un orthoprojecteur.

Désignons par H_E le sous-espace $\lambda(E)H$ sur lequel $\lambda(E)$ projette H. La propriété 2) admet la signification géométrique suivante : $H_{E_1 \cap E_2} = H_{E_1} \cap H_{E_2}$. De 3) on déduit sans peine la proposition plus générale : $\lambda(E_1 \cup E_2) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2) - \lambda(E_1 \cap E_2)$. Géométriquement, cela signifie que $H_{E_1 \cup E_2} = H_{E_1} + H_{E_2}$ et que $H_{E_1} \perp H_{E_2}$, si E_1 et E_2 ne se rencontrent pas. Enfin, il résulte de 3) que $\lambda(\varnothing) = 0$, $\lambda(X) = 1$, c'est-à-dire que $H_\varnothing = \{0\}$, $H_X = H$.

A partir de la mesure projective λ on peut construire toute une famille de mesures ordinaires et de charges. Plus exactement, soient ξ et η deux vecteurs de H. Alors l'application $\lambda_{\xi\eta} : B \to \mathbf{C}$ définie par la formule

$$\lambda_{\xi\eta}(E) = (\lambda(E)\xi, \eta), \tag{28}$$

est une charge complexe sur B. Si $\xi = \eta$, au lieu de $\lambda_{\xi\xi}$ on écrira simplement λ_ξ. Les opérateurs $\lambda(E)$ étant positifs, la charge λ_ξ est une mesure. L'identité

$$\lambda_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(\lambda_{\xi+\eta} - \lambda_{\xi-\eta} + i\lambda_{\xi-i\eta} - i\lambda_{\xi+i\eta}) \tag{29}$$

montre que les charges $\lambda_{\xi\eta}$, donc que la mesure projective λ, peuvent être déterminées à partir de $\{\lambda_\xi\}_{\xi \in H}$.

On peut se servir de la mesure projective λ comme d'une mesure ordinaire pour définir une intégrale. Soit f une fonction numérique bornée B-mesurable sur X. On appelle *somme intégrale de Lebesgue pour* f l'expression

$$S_n(f, \lambda) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{k}{2^n} \lambda\left(\left\{x \in X : \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}\right). \tag{30}$$

Il est immédiat de vérifier que si $n_1 < n_2$, alors $S_{n_1}(f) \geqslant S_{n_2}(f)$ (c'est-à-dire la différence $S_{n_1}(f) - S_{n_2}(f)$ est un opérateur positif). D'autre part la suite $\{S_n(f)\}$ est minorée par l'opérateur $\inf\limits_{x \in X} f(x) \cdot 1$. Il existe (voir exercice 557) $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} S_n(f)$ qui s'appelle *intégrale* de la fonction f *par rapport à la mesure projective* λ et se note $\int\limits_X f(x)\, d\lambda(x)$. Des propriétés de l'intégrale usuelle de Lebesgue il s'ensuit que pour tout vecteur $\xi \in H$ on a

$$\left(\int\limits_X f(x)\, d\lambda(x)\xi, \xi\right) = \int\limits_X f(x)\, d\lambda_\xi(x).$$

De là et de l'identité (29) vient l'égalité plus générale

$$\left(\int\limits_X f(x)\, d\lambda(x)\xi, \eta\right) = \int\limits_X f(x)\, d\lambda_{\xi\eta}(x). \tag{31}$$

Enfin, on peut définir l'intégrale $A = \int\limits_X f(x)\, d\lambda(x)$ pour une fonction f B-mesurable non bornée sur X. Plus exactement, désignons par $\mathcal{D}_A$ l'ensemble des vecteurs $\xi \in H$ pour lesquels converge l'intégrale $\int\limits_X |f(x)|^2\, d\lambda_\xi(x)$. (De (29) on peut déduire que $\mathcal{D}_A$ est un sous-espace vectoriel de H.)

Définissons pour $\xi \in \mathcal{D}_A$ l'opérateur A par

$$(A\xi, \eta) = \int\limits_X f(x)\, d\lambda_{\xi\eta}(x). \tag{32}$$

La convergence de cette intégrale résulte de l'inégalité

$$|\lambda_{\xi\eta}(E)|^2 \leqslant \lambda_\xi(E)\, \lambda_\eta(E), \tag{33}$$

qui est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski. Plus exactement, pour la somme intégrale de l'intégrale (32), on déduit de (33) et de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski la majoration $|S_n(f, \lambda_{\xi\eta})|^2 \leqslant$ $\leqslant S_n(|x|^2, \lambda_\xi)\, S_n(1, \lambda_\eta)$, d'où $\left|\int\limits_X f(x)\, d\lambda_{\xi\eta}(x)\right|^2 \leqslant \int\limits_X |f(x)|^2\, \|\eta\|^2\, d\lambda$. Donc $\|A\xi\|_H \leqslant \|f\|_{L_2(X, \lambda_\xi)}$.

Signalons que si la fonction f est réelle, alors par définition de l'opérateur A, l'expression $(A\xi, \xi)$ est réelle pour $\xi \in \mathcal{D}_A$. Donc, l'opérateur A est symétrique. En fait, cet opérateur défini sur $\mathcal{D}_A$ est auto-adjoint. Ceci

résulte du théorème 8 et de la construction des opérateurs $(A \pm i1)^{-1}$: ces opérateurs peuvent être définis par les intégrales $\int_X \frac{d\lambda(x)}{f(x) \pm i}$.

Maintenant nous pouvons formuler le résultat fondamental de ce numéro.

Théorème 14. *Soit A un opérateur auto-adjoint (pas nécessairement borné) dans un espace hilbertien H. Il existe une mesure projective borélienne unique λ sur* $\mathbf{R}$ *à valeurs dans* End H, *possédant la propriété suivante :*

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\lambda(x) \tag{34}$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur $\mathbf{R}$.

De plus on a

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\lambda(x). \tag{35}$$

Démonstration. L'unicité de λ découle immédiatement de (34) si l'on pose $f = \chi_E$, où E est un borélien de la droite. La démonstration de l'existence passe le plus facilement dans la réalisation de H pour laquelle l'opérateur A est un opérateur de multiplication par une fonction a. En effet, prenons pour $\lambda(E)$ l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de l'ensemble $a^{-1}(E)$. Alors l'égalité (34) pour la fonction en escalier f se transforme en une tautologie (vérifier !). Le cas général de l'égalité (34) et l'égalité (35) se démontrent par des passages à la limite.

La mesure projective λ s'appelle *mesure spectrale* de l'opérateur A, l'égalité (35), *décomposition spectrale* de A.

Du théorème 14 on peut déduire à titre de corollaire la définition de toute fonction borélienne (même infinie) d'un opérateur auto-adjoint A : cette fonction est définie par l'intégrale (34) avec les réserves indiquées plus haut. On vérifie que $f(A)$ est toujours un opérateur fermé, normal au sens que AA^* et A^*A possèdent le même domaine de définition et sont confondus sur ce domaine. Un exemple d'application de cette construction nous est fourni par la description des groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires.

Définition. Dans un espace hilbertien H, l'ensemble $\{V(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ des opérateurs unitaires est dit *groupe à un paramètre* si sont réalisées les conditions suivantes :

1) $V(t)\,V(s) = V(t+s)$ pour $t, s \in \mathbf{R}$;

2) l'application $t \mapsto V(t)$ est continue pour la topologie opératorielle faible.

Théorème de Stone. *Tout groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans H est de la forme*

$$V(t) = e^{itA}, \tag{36}$$

où A est un opérateur auto-adjoint dans H.

Démonstration. Observons tout d'abord que la formule (36) définit bien un groupe à un paramètre : ceci est manifeste si l'on passe à la réalisa-

tion de H dans laquelle A est un opérateur de multiplication par une fonction ; de plus, dans cette réalisation on vérifie sans peine que

$$\frac{d}{dt} V(t)\xi = iV(t)A\xi = iAV(t)\xi \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathcal{D}_A. \tag{37}$$

Soit donné maintenant un groupe à un paramètre $\{V(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$. Définissons $\mathcal{D}_A$ comme l'ensemble des vecteurs $\xi \in H$ pour lesquels la fonction $t \mapsto V(t)\xi$ est dérivable et définissons pour $\xi \in \mathcal{D}_A$ un opérateur A par $A_\xi = -i \frac{d}{dt} V(t)\xi \Big|_{t=0}$. Montrons que $\mathcal{D}_A$ est dense dans H. Remarquons tout d'abord que la correspondance $t \mapsto V(t)$ est fortement continue. Ceci résulte de l'égalité $\|(V_{t_1} - V_{t_2})\xi\|^2 = 2\|\xi\|^2 - 2\operatorname{Re}(V_{t_1-t_2}\xi, \xi)$ et de la faible continuité de V_t. Soit maintenant $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R})$ une δ-suite. Alors pour tout $\xi \in H$ la suite $\xi_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\tau) V(\tau)\xi \, d\tau$ converge vers ξ. Vérifions que $\xi_n \in \mathcal{D}_A$. En effet,

$$V(t)\xi_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\tau) V(t+\tau)\xi \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\tau - t) V(\tau)\xi \, d\tau.$$

D'où $\frac{d}{dt} V(t)\xi_n = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n'(\tau - t) V(\tau)\xi \, d\tau$. (La dérivabilité de l'intégrale par rapport au paramètre t se démontre comme en analyse ordinaire.)

Vérifions maintenant que $V(t)$ laisse invariant le sous-espace $\mathcal{D}_A$ et que (37) sont valables. Pour cela il suffit de remarquer que les vecteurs $V(t+\tau)\xi$ et $V(\tau)V(t)\xi$ sont confondus. En les dérivant par rapport à τ et en faisant $\tau = 0$ on obtient la relation cherchée.

La symétrie de l'opérateur A est mise en évidence par une dérivation de l'égalité $(V(t)\xi, V(t)\xi) \equiv 1$ par rapport à t pour $t = 0$. Vérifions enfin que A est essentiellement auto-adjoint. Soit $\eta \in \ker(A^* \pm i1)$. Alors pour tout $\xi \in \mathcal{D}_A$ on a $((A \mp i1)\xi, \eta) = (\xi, (A^* \pm i1)\eta) = 0$. Donc, la fonction $f(t) \equiv \equiv (V(t)\xi, \eta)$ est solution de l'équation différentielle $f'(t) \pm f(t) = 0$. D'où $f(t) = ce^{\mp t}$. Mais f est bornée, puisque $V(t)$ est un opérateur unitaire. Donc $c = 0$ et $(V(t)\xi, \eta) = 0$ pour tous les $\xi \in \mathcal{D}_A$. Comme $\mathcal{D}_A$ est dense dans H, il vient $\eta = 0$. Donc $\ker(A^* \pm i1) = 0$ et par suite A est essentiellement auto-adjoint. Soit $\bar{A}$ son extension auto-adjointe. Comparons maintenant les opérateurs $V(t)$ et $\bar{V}(t) = e^{it\bar{A}}$. Soit $\xi \in \mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{\bar{A}}$. Considérons la fonction $f(t) = (V(-t)\bar{V}(t)\xi, \eta)$. En dérivant par rapport à t et utilisant (37), il vient

$$f'(t) = -(V(-t)iA\bar{V}(t)\xi, \eta) + (V(-t)iA\overline{V(t)}\xi, \eta) = 0.$$

D'où $f(t) \equiv (\xi, \eta)$, ce qui donne $V(-t)\bar{V}(t)\xi \equiv \xi$, c'est-à-dire $\bar{V}(t)\xi = = V(t)\xi$. Comme $V(t)$ et $\bar{V}(t)$ sont unitaires et $\mathcal{D}_A$ dense dans H, il vient $\bar{V}(t) = V(t)$, c.q.f.d.

DEUXIÈME PARTIE

PROBLÈMES ET EXERCICES

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES ENSEMBLES ET DE TOPOLOGIE

§ 1. Relations. Axiome de choix et lemme de Zorn

1°. Parmi les relations suivantes indiquer celles qui sont des relations d'équivalence :

a) l'égalité de deux nombres ;

b) la similitude de deux triangles ;

c) la relation d'ordre sur la droite réelle ;

d) la dépendance linéaire dans un espace vectoriel L de dimension $n > 1$;

e) la dépendance linéaire dans l'espace $L^* = L\backslash\{0\}$, où L est un espace vectoriel.

2. On dira que deux fonctions f_1 et f_2 positives sur l'intervalle $[0, 1]$ sont équivalentes si

$$0 < \varliminf_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad \varlimsup_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \infty.$$

Vérifier que c'est bien une relation d'équivalence et que l'ensemble quotient correspondant n'est pas dénombrable.

3. Définissons la relation $f_1 > f_2$ pour les fonctions positives sur l'intervalle $[0, 1]$ en posant $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$. Vérifier que c'est une relation d'ordre partiel et prouver que tout sous-ensemble dénombrable est borné.

4°. Soient X et Y des ensembles partiellement ordonnés. Définissons sur le produit $X \times Y$ la relation $(x_1, y_1) \geqslant (x_2, y_2)$ en posant $x_1 \geqslant x_2$ et $y_1 \geqslant y_2$. Prouver que c'est une relation d'ordre partiel. Sera-t-elle une relation d'ordre si X et Y sont des ensembles ordonnés ?

5. a) Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'ensembles partiellement ordonnés. Munissons leur produit direct $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ de la relation $\geqslant$ en posant $(x_\alpha) \geqslant (y_\alpha)$ si

$x_\alpha \geqslant y_\alpha$ pour tous les $\alpha \in A$. Montrer que c'est une relation d'ordre partiel ; le produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ muni de cet ordre s'appelle *produit d'ensembles partiellement ordonnés.*

b) On se place dans les hypothèses de a) et l'on distingue un point $x_\alpha \in X_\alpha$. Appelons produit des couples $(X_\alpha ; x_\alpha)$ le sous-ensemble $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha ; x_\alpha) \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ composé des collections (y_α) telles que y_α soit différent de x_α seulement pour un nombre fini d'indices α. Munir $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha ; x_\alpha)$ d'une structure d'ensemble partiellement ordonné avec un point distingué.

c) Prouver que l'ensemble des nombres naturels partiellement ordonné par la divisibilité avec le point 1 distingué est isomorphe au produit d'un nombre dénombrable d'exemplaires de la série naturelle munie de l'ordre habituel et de point 0 distingué.

6°. Définir une suite fondamentale en termes de suites généralisées $d_{mn} = d(x_m, x_n)$.

7°. Désignons par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties de X ordonné partiellement par l'inclusion. Montrer que si $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ (réunion disjonctive), alors $\mathcal{P}(X)$ est isomorphe au produit $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{P}(X_\alpha)$ comme ensemble partiellement ordonné.

8. Soit X un ensemble partiellement ordonné. Supposons que l'ordre partiel de X possède la propriété suivante : l'ensemble $M(x) = \{y \in X : y \leqslant x\}$ est fini pour tous les $x \in X$. Pour toute fonction $f(x)$ sur X posons

$$F(x) = \sum_{y \leqslant x} f(y).$$

Montrer que la fonction $f(x)$ se détermine d'après $F(x)$ à l'aide d'une formule de la forme

$$f(x) = \sum_{y \leqslant x} \mu(x, y) F(y).$$

La fonction μ est définie de façon unique et s'appelle *fonction de Möbius* pour l'ensemble partiellement ordonné X.

9. Soit donnée une famille $(X_\alpha ; x_\alpha)$ d'ensembles partiellement ordonnés avec des points distingués. Supposons que tout X_α satisfait à la condition de l'exercice 8, c'est-à-dire qu'est définie sa fonction de Möbius μ_α ; supposons que pour tous les α à l'exclusion peut-être d'un nombre fini, le point x_α est l'élément minimum de X_α. Montrer que pour l'ensemble partiellement ordonné $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha ; x_\alpha)$ est définie la fonction de Möbius μ et ce par la formule

$$\mu(\{y_\alpha\}, \{z_\alpha\}) = \prod_{\alpha \in A} \mu_\alpha(y_\alpha, z_\alpha).$$

10. Trouver la fonction de Möbius des ensembles partiellement ordonnés suivants :

a) la série naturelle munie de l'ordre habituel ;

b) la série naturelle munie de la relation de divisibilité ;

c) l'ensemble des parties finies d'un ensemble donné X ordonné par l'inclusion ;

d)** l'ensemble des parties d'un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini ordonné par l'inclusion.

11*. Exprimer au moyen de la fonction de Möbius de l'exercice 10 b) les quantités suivantes :

a) la *fonction d'Euler* $\varphi(n)$ égale au nombre d'entiers naturels inférieurs et premiers à n ;

b)** le nombre $P(n, q)$ de polynômes irréductibles de degré n dont les coefficients appartiennent au corps fini F_q et dont le coefficient supérieur est 1 ;

c) la limite $C(N)/N^2, N \to \infty$, où $C(N)$ est le nombre de fractions irréductibles de la forme p/q, $1 \leqslant p \leqslant N$, $1 \leqslant q \leqslant N$.

12. Soit $\Phi_n(t) = \prod_{d|n} (t^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$, où μ est la fonction de Möbius de l'exercice 10 b). Montrer que

a) $\Phi_n(t)$ est un polynôme de degré $\varphi(n)$ de coefficients entiers (voir exercice 11 a) ;

b) $\prod_{d|n} \Phi_d(t) = t^n - 1$;

c)* les polynômes $\Phi_n(t)$ sont irréductibles et premiers entre eux sur le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels.

13. Supposons que A est un ensemble complètement ordonné et que pour tout $\alpha \in A$ est défini un ensemble ordonné non vide X_α. Définissons sur l'ensemble $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ un *ordre lexicographique* en posant $x \geqslant y$ si $x_{\alpha_0} \geqslant y_{\alpha_0}$, où α_0 est l'élément minimum de A pour lequel $x_\alpha \neq y_\alpha$. Montrer que c'est bien une relation d'ordre.

14. Supposons que l'espace $\mathbf{R}^n$ est ordonné de telle sorte que

a) $x_1 \geqslant y_1$ et $x_2 \geqslant y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2$;

b) $x \geqslant y$ et $\lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \geqslant \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$;

c) $x \geqslant y$ et $y \geqslant x \Rightarrow x = y$.

Montrer que $\mathbf{R}^n$ isomorphe en tant qu'espace ordonné au produit de n droites (munies de l'ordre habituel) sur lequel est défini un ordre lexicographique (voir exercice 13).

15*. On dira que deux ensembles dénombrables complètement ordonnés sont *équivalents* si l'on peut établir entre eux une correspondance biunivoque monotone. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des classes d'équivalence correspondantes. Définissons sur $\mathcal{M}$ une relation d'ordre en posant $\mu > \nu$ si les classes μ et ν contiennent des représentants M et N tels que M soit équivalent à un intervalle initial de N (c'est-à-dire à un ensemble de la forme $N(n_0) = \{n \in N : n < n_0\}$).

Montrer que

a) $\mathcal{M}$ contient un élément minimum μ_0 ;

b) deux éléments quelconques de $\mathcal{M}$ sont comparables ;

c) l'ensemble $\mathcal{M}$ est complètement ordonné ;

d) l'ensemble $\mathcal{M}$ n'est pas dénombrable ;

e)** tout ensemble non dénombrable contient une partie équipotente à $\mathcal{M}$.

16*. Supposons que $\mathcal{M}$ est l'ensemble complètement ordonné décrit dans l'exercice 15. Posons $\mathfrak{A} = \mathcal{M} \times [0, 1[$ et définissons sur $\mathfrak{A}$ un ordre lexicographique : si $a = (\mu, x)$, $b = (\nu, y)$, alors $a \geqslant b$ signifie que ou bien $\mu \geqslant \nu$ et $\mu \neq \nu$ ou bien $\mu = \nu$ et $x \geqslant y$.

Montrer que tout intervalle initial (voir exercice 15) de l'ensemble $\mathfrak{A}$ est équivalent (comme ensemble ordonné) à l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$ tandis que l'ensemble $\mathfrak{A}$ tout entier ne l'est pas.

17*. Soit $a_0 = (\mu_0, 0)$ le point minimum de l'ensemble $\mathfrak{A}$ de l'exercice 16. Définissons une topologie sur $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \backslash \{a_0\}$ en prenant pour base d'ensembles ouverts les « intervalles » $(a, b) = \{c \in \mathfrak{A}_0 : a \leqslant c \leqslant b,\ c \neq a,\ c \neq b\}$. Montrer que

a) tout point $a \in \mathfrak{A}_0$ possède un voisinage homéomorphe à un intervalle ordinaire ;

b) l'espace topologique $\mathfrak{A}_0$ est connexe et n'est pas homéomorphe à un intervalle ordinaire.

L'espace $\mathfrak{A}_0$ s'appelle *droite d'Alexandrov* et est un exemple de variété à une dimension ne possédant pas de base dénombrable d'ensembles ouverts.

18°. Montrer que l'ensemble des disques contenus dans un carré donné du plan admet un élément maximal mais pas un élément maximum pour l'inclusion.

19. Prouver avec le lemme de Zorn que tout ensemble vectoriel contient une base.

20. Montrer avec le théorème de Zermelo que pour deux ensembles quelconques A et B il existe soit une application biunivoque de A sur une partie de B, soit une application biunivoque de B sur une partie de A.

21*. a) Déduire le théorème de Zermelo à partir du lemme de Zorn.

b) Prouver le lemme de Zorn en utilisant le théorème de Zermelo.

22. a) Montrer que sur un ensemble fini X toute relation d'ordre partiel $\mathbf{R}$ est contenue dans une relation d'ordre $\tilde{\mathbf{R}}$.

b)* Ceci est-il vrai pour les ensembles infinis ?

23*. Montrer que le corps des nombres complexes est isomorphe à l'adhérence algébrique du corps des fonctions rationnelles à coefficients rationnels d'une famille de variables algébriquement indépendantes ayant la puissance du continu.

§ 2. Complétions

24. a) Montrer que dans un espace complet X on a le

Théorème des boules contractiles. Soit $\{B_n\}$ une suite de boules fermées dans un espace métrique X, telle que : 1) $B_1 \supset B_2 \supset B_n \supset \ldots$; 2) les rayons des boules B_n tendent vers 0 pour $n \to \infty$. Alors l'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ contient exactement un point.

b)* Montrer que si le théorème des boules contractiles est vrai dans un espace métrique X, alors cet espace est complet.

25°. Montrer que toute fonction uniformément continue sur un espace métrique X se prolonge de façon unique en une fonction continue sur la complétion et que ce prolongement est uniformément continu.

26. Montrer que les espaces métriques suivants ne sont pas complets et construire leurs complétions :

a) la droite $\mathbf{R}$ munie de la distance $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.

b) la droite $\mathbf{R}$ munie de la distance $d(x, y) = |e^x - e^y|$.

27°. Sur l'ensemble des intervalles fermés de la droite définissons une distance par la formule $d([a, b], [c, d]) = |a-c|+|b-d|$. Montrer que cet ensemble n'est pas complet et construire sa complétion.

28. Sur l'ensemble $\{\Delta\}$ des intervalles fermés de la droite définissons une distance comme la longueur de la différence symétrique

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = |\Delta_1|+|\Delta_2|-2\,|\Delta_1 \cap \Delta_2|.$$

Montrer que cet espace métrique n'est pas complet et en construire la complétion.

29°. Montrer que l'espace $B(X)$ de toutes les fonctions bornées sur l'ensemble X muni de la distance

$$d(f, g) = \sup |f(x)-g(x)|, \quad x \in X$$

est complet.

30°. Soit X un espace métrique borné. Prouver que la correspondance $x \mapsto d(x, \cdot)$ est une isométrie de X dans $B(X)$ (voir exercice 29).

31°. X étant un sous-ensemble dans un espace métrique complet Y prouver que

a) X est complet si et seulement s'il est fermé.

b) La complétion de X est égale à son adhérence dans Y.

c) Déduire à partir des exercices 29, 30 et a), b) un théorème de complétion pour les espaces bornés.

32. Soient X un espace métrique complet, Y_i des sous-ensembles ouverts partout denses dans X. Prouver que $\bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$ est partout dense dans X.

33. a) Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels de la droite ne peut pas être représenté par la réunion d'un nombre dénombrable d'ensembles fermés.

b) Montrer que sur la droite il n'existe pas de fonction qui soit continue en tous les points rationnels et discontinue en tous les points irrationnels.

34. Montrer que les espaces de polynômes ne sont pas complets pour les distances suivantes :

a) $d(P, q) = \max\limits_{x \in [0,1]} |P(x)-Q(x)|$;

b) $d(P, q) = \int\limits_0^1 |P(x)-Q(x)|\, dx$;

c) $d(P, Q) = \sum\limits_i |c_i|$ si $P(x)-Q(x) = \sum c_i x^i$.

35. Sur l'ensemble $C(X, Y)$ des applications continues d'un espace métrique X dans un espace métrique complet borné Y définissons une distance par la formule

$$d(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} d_Y(f_1(x), f_2(x)).$$

Montrer que l'espace métrique $C(X, Y)$ est complet.

36. Soient X un espace métrique complet borné muni d'une métrique d_X ; G l'ensemble des applications biunivoques et bicontinues de X sur X. Définissons sur G une distance par la formule

$$d(f_1, f_2) = \sup\left[d_X(f_1(x), f_2(x)) + d_X(f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x))\right].$$

Etablir la complétude de l'espace métrique G.

37°. Soit p un nombre premier. Définissons une norme *p-adique* sur l'ensemble des rationnels par

$$||r||_p = p^{-k} \quad \text{si} \quad r = p^k \frac{m}{n},$$

où m et n sont des entiers premiers à p.

Prouver les relations :

a) $||r_1 r_2||_p = ||r_1||_p\, ||r_2||_p$;

b) $||r_1+r_2||_p \leqslant \max\{||r_1||_p, ||r_2||_p\}$;

c) si $||r_1||_p < ||r_2||_p$, alors $||r_1+r_2||_p = ||r_2||_p$.

38. Montrer que l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels muni de la distance $d_p(r_1, r_2) = ||r_1-r_2||_p$ (voir exercice 37) est un espace métrique. Soit $\mathbf{Q}_p$ sa complétion. Montrer que toutes les opérations arithmétiques dans $\mathbf{Q}$ se prolongent par continuité à $\mathbf{Q}_p$. Le corps ainsi obtenu s'appelle *corps des nombres p-adiques* (à propos de la non-complétude de $\mathbf{Q}$ voir exercice 39).

39*. Montrer que tout élément du corps $\mathbf{Q}_p$ (voir exercice 38) se représente de façon unique par une fraction p-adique

$$\ldots a_2 a_1 a_0, \quad a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k},$$

où $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$; après la virgule on a un nombre fini de chiffres, avant,

un nombre infini. En d'autres termes, tout élément $x \in \mathbf{Q}_p$ est la somme d'une série convergente $\sum_{i=-k}^{+\infty} a_i p^i$. Montrer que $\mathbf{Q}_p \neq \mathbf{Q}$.

40. Montrer que dans le corps $\mathbf{Q}_5$ (voir exercice 38) on a les égalités

$$2+3 = \ldots 00010\,; \qquad 2-3 = \ldots 444\,;$$
$$2\cdot 3 = \ldots 00011\,; \qquad 2:3 = \ldots 3131314.$$

41. Montrer que dans le corps $\mathbf{Q}_5$ des nombres 5-adiques on peut extraire la racine carrée du nombre -1 $(= \ldots 44)$ et trouver ses trois derniers chiffres. Combien existe-t-il de telles racines ?

42*. Désignons par $\mathbf{Z}_p$ l'adhérence de l'anneau des entiers de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}_p$ (l'ensemble des *entiers p-adiques*). Montrer que $\mathbf{Z}_p$ est un ensemble compact. Construire une application biunivoque et bicontinue de $\mathbf{Z}_p$ sur l'ensemble triadique de Cantor.

43*. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$ (voir exercice 42) il existe la limite $\lim\limits_{n\to\infty} x^{p^n}$. Désignons cette limite par $\operatorname{sgn}_p x$. Montrer que la fonction *(signe p-adique)* ainsi obtenue prend très exactement p valeurs distinctes : 0 et les $p-1$ racines de la puissance $p-1$ de 1. Prouver l'identité

$$\operatorname{sgn}_p(xy) = \operatorname{sgn}_p x \cdot \operatorname{sgn}_p y.$$

44*. Trouver le domaine de convergence dans $\mathbf{Q}_p$ des séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad \sum \frac{x^k}{k}(-1)^{k-1}.$$

45*. Montrer que sur $\mathbf{Q}_p$ il n'existe pas de relation d'ordre possédant les propriétés suivantes :

a) si $x > 0$ et $y > 0$ alors $x+y > 0$;

b) si $x > 0$ et $y > 0$ alors $xy > 0$;

c) si $x_n > 0$ et si existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, alors $x \geqslant 0$.

46. Définissons sur l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels une distance en posant $d(m, n) = 1/k$ si les k dernières décimales de m et n sont confondues.

a) Prouver que l'espace métrique obtenu n'est pas complet et que sa complétion est isomorphe en tant qu'anneau au produit direct des anneaux $\mathbf{Z}_2$ et $\mathbf{Z}_5$.

b) Prouver que pour tout nombre naturel k il existe exactement 4 terminaisons de k chiffres :

$$\ldots 000\ 000$$
$$\ldots 000\ 001$$
$$\ldots 890\ 625$$
$$\ldots 109\ 376,$$

qui se reproduisent par multiplication. (C'est-à-dire que si les nombres N_1 et N_2 se terminent par les k chiffres indiqués il ne sera de même pour leur produit N_1N_2.)

§ 3. Catégories et foncteurs

47°. Montrer que la catégorie des parties non vides d'un ensemble donné X (dont les morphismes sont les injections) ne possède pas d'objets répulsifs et que la catégorie duale en admet un.

48°. Construire un foncteur contravariant de la catégorie de toutes les parties d'un ensemble donné (dont les morphismes sont les injections) dans lui-même.

49°. Existe-t-il un objet répulsif dans la catégorie des groupes, dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps donné, dans les catégories dualles des catégories des groupes et des espaces vectoriels ?

50°. Soit G_1 la catégorie des groupes abéliens de générateur distingué (dont les morphismes sont les homomorphismes de groupe envoyant le générateur distingué dans un générateur distingué). Indiquer les objets universels de G_1 et de G_1^0.

51. Soit G_2 la catégorie des groupes à deux générateurs distingués (dont les morphismes sont les homomorphismes de groupe envoyant les générateur distingués dans des générateur distingués). Prouver que G_2 contient un objet universel. Cet objet s'appelle *groupe libre* à deux générateurs.

52. Désignons par AG_2 la sous-catégorie complète dans G_2 (voir exercice 51) dont les objets sont les groupes abéliens à deux générateurs distingués. Mettre en évidence l'existence d'un objet universel dans AG_2. Cet objet s'appelle *groupe abélien libre* à deux génératrices.

53*. Désignons par $A_n(K)$ la catégorie des algèbres associatives sur le corps K à n générateurs distingués. Mettre en évidence l'existence d'un objet universel dans $A_n(K)$. Cet objet universel s'appelle *algèbre tensorielle* sur un espace vectoriel de dimension n sur le corps K.

54*. Montrer l'existence d'un objet universel dans la sous-catégorie complète $CA_n(K)$ de $A_n(K)$ composée des algèbres commutatives.

55*. Montrer l'existence d'un objet universel dans la catégorie $LA_n(K)$ des algèbres de Lie sur le corps K à n générateurs distingués. Cet objet s'appelle *algèbre de Lie libre* à n générateurs.

56*. Soit $\mathfrak{S}$ une algèbre de Lie sur le corps K de caractéristique 0. Considérons la catégorie $K(\mathfrak{S})$ dont les objets sont les applications linéaires φ de l'espace $\mathfrak{S}$ dans les algèbres associatives (cette catégorie diffère d'un objet à l'autre), possédant la propriété suivante :

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x).$$

On appelle morphisme d'un objet $\varphi : \mathfrak{S} \to A$ dans un objet $\psi : \mathfrak{S} \to B$ un homomorphisme $\chi : A \to B$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, dashed, "\chi"] \\ \mathfrak{S} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Montrer que $K(\mathfrak{S})$ possède un objet universel

$$\varphi_0 : \mathfrak{S} \to U(\mathfrak{S}).$$

L'algèbre $U(\mathfrak{S})$ s'appelle *enveloppe associative* ou *algèbre enveloppante* pour $\mathfrak{S}$.

57*. Montrer que l'enveloppe associative (voir exercice 56) d'une algèbre de Lie libre à n génératrices est isomorphe à une algèbre tensorielle sur un espace de dimension n.

58*. Soit $\{X_\alpha\}$, $\alpha \in A$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathfrak{K}$.

Considérons la catégorie $\tilde{\mathfrak{K}}$ dont les objets sont des familles de morphismes $\varphi_\alpha \in \mathrm{Mor}(X_\alpha, Y)$, $\alpha \in A$ (Y est un objet de $\mathfrak{K}$ qui n'est pas le même pour tous les objets de $\tilde{\mathfrak{K}}$). Les morphismes de $\tilde{\mathfrak{K}}$ sont les familles de diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\chi"] \\ X_\alpha \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "\psi_\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

Si la catégorie $\tilde{\mathfrak{K}}$ possède un objet répulsif universel, alors l'objet correspondant de $\mathfrak{K}$ s'appelle *somme* d'objets et se note $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Les morphismes $i_\alpha : X_\alpha \to \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ s'appellent *injections canoniques* des termes dans la somme.

Montrer que la somme d'une famille quelconque d'objets est définie dans la catégorie des ensembles et dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps donné.

59. On obtient la définition d'un *produit* de familles d'objets $\{X_\alpha\}$, $\alpha \in A$ de la catégorie $\mathfrak{K}$ à partir de celle de la somme (voir exercice 58) par inversion du sens des flèches. De façon plus exacte on appelle produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ la somme des objets X_α dans la catégorie duale $\tilde{\mathfrak{K}}^\circ$. Les morphismes $p_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$ s'appellent *projections canoniques* du produit sur les facteurs.

Montrer que le produit de toute famille d'objets est définie sur la catégorie des ensembles et sur la catégorie des espaces vectoriels sur un corps donné.

60. Montrer que dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps donné la somme $\bigsqcup_{k=1}^{n} L_k$ et le produit $\prod_{k=1}^{n} L_k$ d'un nombre fini d'objets sont isomorphes.

61°. Soient L_1 et L_2 deux espaces vectoriels sur un corps K. Considérons la catégorie dont les objets sont les applications bilinéaires $\varphi : L_1 \times L_2 \to L$, où L est un espace vectoriel (qui n'est pas le même pour chaque objet φ). On appellera morphisme d'un objet $\varphi : L_1 \times L_2 \to L$ dans un objet ψ :

$L_1 \times L_2 \to M$ une application linéaire $\chi : L \to M$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "\chi"] \\ L_1 \times L_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & M \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Montrer que cette catégorie possède un élément répulsif universel $\pi : L_1 \times L_2 \to L_1 \underset{K}{\otimes} L_2$. L'espace vectoriel $L_1 \otimes L_2$ s'appelle *produit tensoriel* des espaces L_1 et L_2 sur le corps K.

62*. Soient G_1 et G_2 des groupes abéliens finis. Considérons la catégorie de toutes les applications :

$$\varphi : G_1 \times G_2 \to G,$$

où G est un groupe abélien fini quelconque (qui n'est pas le même pour chaque objet), qui sont des homomorphismes en chaque variable. Les morphismes sont les diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\chi"] \\ G_1 \times G_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"'] & G' \end{tikzcd}$$

où χ est un homomorphisme. Montrer que la catégorie construite possède un objet universel

$$G_1 \times G_2 \to \mathrm{Tor}\,(G_1, G_2)$$

(appelé *produit de torsion* des deux groupes). Calculer $\mathrm{Tor}\,(C_m, C_n)$, où C_m est le groupe cyclique d'ordre m.

63*. Soient donnés un ensemble filtrant A, une catégorie $\mathfrak{K}$, pour tout $\alpha \in A$ un objet $X_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ et pour tout couple $\alpha \leqslant \beta$ un morphisme $\varphi_{\alpha\beta} \in \mathrm{Mor}\,(X_\alpha, X_\beta)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_\beta \arrow[d, "\varphi_{\beta\gamma}"] \\ X_\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "\varphi_{\alpha\gamma}"'] & X_\gamma \end{tikzcd}$$

étant commutatif pour tout triplet $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Considérons la catégorie $\mathfrak{K}_A$ dont les objets sont les familles de morphismes $\{\varphi_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha \in A}$ compatibles avec $\varphi_{\alpha\beta}$, où X est un objet de K (qui n'est pas le même pour chaque famille) et appelons morphisme de $\{\varphi_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha \in A}$ dans $\{\psi_\alpha : X_\alpha \to Y\}_{\alpha \in A}$ un morphisme $\chi \in \mathrm{Mor}\,(X, Y)$ tel que pour tout $\alpha \in A$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\chi"] \\ X_\alpha \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "\psi_\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

soit commutatif. L'objet universel de la catégorie $\mathfrak{K}_A$ (s'il existe) s'appelle

limite inductive de la famille $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. La notion duale de *limite projective* se définit comme l'objet universel dans $(\mathfrak{K}_A)^\circ$.

Montrer que

a) le groupe additif des nombres rationnels est limite inductive d'une famille dénombrable de groupes de nombres entiers ;

b)* l'anneau $\mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques (voir exercice 42) est limite projective des anneaux des résidus modulo p^n.

64°. Tout espace vectoriel complexe peut être traité comme un espace réel et toute application complexe linéaire comme une application réelle linéaire. Montrer que la correspondance décrite est un foncteur covariant de la catégorie $L(\mathbf{C})$ des espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$ dans la catégorie $L(\mathbf{R})$ des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$.

65. Montrer que l'application $L \to L \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ (on désigne ainsi le produit tensoriel sur $\mathbf{R}$ au sens de l'exercice 61) engendre un foncteur covariant de $L(\mathbf{R})$ dans $L(\mathbf{C})$.

66. Montrer que les catégories $L(\mathbf{R})$ et $L(\mathbf{C})$ (voir exercice 64) ne sont pas équivalentes.

67. Montrer que la catégorie de tous les espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K est équivalente à l'une de ses sous-catégories contenant un nombre dénombrable d'objets.

68. Montrer que la catégorie des groupes finis est équivalente à l'une de ses sous-catégories contenant un nombre dénombrable d'objets.

69°. Soient donnés un groupe G et un corps K. Considérons l'ensemble $K[G]$ des combinaisons linéaires formelles des éléments de G à coefficients de K. $K[G]$ est une algèbre sur K pour l'addition, la multiplication par des éléments de K et le produit.

Montrer que

a) la correspondance $G \to K[G]$ est un foncteur covariant de la catégorie des groupes dans la catégorie des K-algèbres ;

b) l'application G dans $K[G]$ est un objet universel dans la catégorie des applications multiplicatives du groupe G dans les K-algèbres.

CHAPITRE 2

THÉORIE DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRALE

§ 1. Théorie de la mesure

1. Algèbre d'ensembles.

70°. Montrer que la différence symétrique vérifie la condition suivante :

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

(ceci est l'analogue de l'inégalité triangulaire pour la « distance » $d(A, B) = A \triangle B$ à valeurs dans des ensembles).

71. Montrer que

a) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

b) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

c) $(A_1 \backslash A_2) \triangle (B_1 \backslash B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

(Ces inclusions traduisent la continuité de la réunion, de l'intersection et de la complémentation pour la « distance » au sens de l'exercice 70.)

72°. Montrer qu'un système d'ensembles fermé pour la réunion et l'intersection n'est généralement pas un anneau.

73. Montrer qu'un système d'ensembles fermé pour la réunion et la différence est un anneau.

74°. Montrer que l'ensemble de tous les intervalles (ouverts, fermés et semi-ouverts) de la droite est un semi-anneau mais pas un anneau.

75°. Soient $X = \{a, b\}$ un ensemble composé de deux éléments, $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

a) Citer un exemple de semi-anneau composé d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ qui ne soit pas un anneau.

b) Décrire les semi-anneaux susceptibles d'être construits avec les éléments de $\mathcal{P}(X)$.

c) Décrire les anneaux que l'on peut construire avec les éléments de $\mathcal{P}(X)$.

d) Décrire les algèbres que l'on peut construire avec les éléments de $\mathcal{P}(X)$.

76°. Montrer que pour tout système non vide d'ensembles $S \subset \mathcal{P}(X)$ il existe un *plus petit anneau* $R(S)$ et un seul, c'est-à-dire un anneau d'ensembles $R(S)$ tel que $S \subset R(S)$ et $R(S) \subset R$ pour tout anneau R contenant S.

77°. Montrer que pour le semi-anneau S le plus petit anneau est confondu avec un système d'ensembles de la forme $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in S$.

78°. Montrer que toute σ-algèbre est une δ-algèbre et inversement que toute δ-algèbre est une σ-algèbre.

79. Montrer qu'un produit direct de semi-anneaux est un semi-anneau.

80. Montrer qu'un produit direct d'anneaux n'est pas forcément un anneau.

81°. On appelle *limite supérieure d'une suite d'ensembles* E_n l'ensemble $\overline{\lim_n} E_n = \bigcap_n \left(\bigcup_{k \geqslant n} E_k\right)$, c'est-à-dire un ensemble de points appartenant à une infinité d'ensembles E_n. On appelle *limite inférieure d'une suite d'ensembles* E_n l'ensemble $\underline{\lim_n} E_n = \bigcup_n \left(\bigcap_{k \geqslant n} E_k\right)$. Montrer que pour toute suite d'ensembles E_n on a $\underline{\lim_n} E_n \subseteq \overline{\lim_n} E_n$. Si la limite supérieure et la limite inférieure sont égales, alors leur valeur commune s'appelle *limite de la suite d'ensembles* E_n.

82°. Citer un exemple de suite d'ensembles E_n telle que $\underline{\lim_n} E_n \neq \overline{\lim_n} E_n$.

83. Soient X un ensemble et $\{E_n\}$ une suite de parties de X. Montrer que

$$X \setminus \overline{\lim_n} E_n = \underline{\lim_n} (X \setminus E_n).$$

84. Soient $\{E_n\}$ une suite d'ensembles et $\{\chi_n\}$ la suite de leurs fonctions caractéristiques. Montrer que la fonction caractéristique de l'ensemble $\overline{\lim_n} E_n$ est la fonction $\overline{\lim_n} \chi_n$ et la fonction caractéristique de l'ensemble $\underline{\lim_n} E_n$, la fonction $\underline{\lim_n} \chi_n$.

85. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence de la limite d'une suite d'ensembles E_n est l'existence de la limite de la suite des fonctions caractéristiques des ensembles E_n.

86°. Soient A un système d'ensembles et $\tilde{A}$ l'ensemble des fonctions caractéristiques des ensembles de A. Montrer que A est un anneau d'ensembles si et seulement si $\tilde{A}$ est un anneau algébrique (pour l'addition modulo 2 et la multiplication).

87*. On appelle *boréliens de la droite* les ensembles obtenus par un nombre dénombrable de réunions, d'intersections et de différences d'intervalles. Montrer que l'ensemble des boréliens a la puissance du continu.

88*. Soient donnés 10 ensembles. Combien de nouveaux ensembles peut-on former avec ces ensembles en appliquant plusieurs fois les opérations d'intersection, de réunion, de différence et de différence symétrique ?

89°. Soient $f: A \to B$ une application d'ensembles, $\mathcal{A}$ une famille de parties de A, $\mathcal{B}$ une famille de parties de B. Posons

$$f(\mathcal{A}) = \{f(X) \subset \mathcal{B} : X \in \mathcal{A}\},$$
$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(Y) \in \mathcal{A} : Y \in \mathcal{B}\}.$$

Montrer que si $\mathcal{B}$ est un anneau, il en est de même de $f^{-1}(\mathcal{B})$.

90. Dans les notations de l'exercice 89, montrer que $f(\mathcal{A})$ n'est pas en général nécessairement un anneau si $\mathcal{A}$ l'est.

91. Dans les notations de l'exercice 89 montrer que si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre, il en est de même de $f^{-1}(\mathcal{B})$.

92. Dans les notations des exercices 76 et 89, montrer que

$$R(f^{-1}(\mathcal{B})) = f^{-1}(R(\mathcal{B})).$$

2. Prolongement de la mesure.

93. Soit X un espace muni d'une mesure finie μ définie sur une σ-algèbre $R \subset \mathcal{P}(X)$. On appelle *mesure intérieure* d'un ensemble $A \subset X$ le nombre $\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \backslash A)$, où μ^* est la mesure extérieure de l'ensemble A. Montrer que

$$\mu^*(A) \geqslant \mu_*(A).$$

94. Dans les notations de l'exercice 93, montrer que l'ensemble $A \subset X$ est mesurable-Lebesgue si et seulement si

$$\mu_*(A) = \mu^*(A).$$

95. Montrer que la puissance de l'ensemble des parties mesurables-Lebesgue de l'intervalle [0, 1] est supérieure à celle du continu.

96*. Désignons par μ la mesure de Lebesgue de l'intervalle [0, 1] et munissons l'espace des parties mesurables-Lebesgue de l'intervalle [0, 1] d'une relation d'équivalence en posant $A \sim B$ si $\mu(A \triangle B) = 0$. Montrer que l'ensemble des classes d'équivalence possède la puissance du continu.

97. Soit μ une mesure sur S. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes si S est un σ-anneau et sont susceptibles de ne pas l'être si S est un semi-anneau :

a) la *σ-additivité :* $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$;

b) la *semi-continuité à droite :* si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ et $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, alors $\mu(A) = \lim \mu(A_k)$;

c) la *semi-continuité à gauche :* si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ et $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, alors $\mu(A) = \lim \mu(A_k)$;

d) la *continuité :* $\mu\left(\lim_{n \to \infty} A_k\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_k)$.

98. Soient μ une mesure σ-additive sur un semi-anneau $S \subset \mathcal{P}(X)$, μ^* la mesure extérieure correspondante sur $\mathcal{P}(X)$. Montrer que la relation $\mu^*(A \triangle B) = 0$ est une relation d'équivalence et que la fonction $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu^*(A \triangle B)$ définit une distance sur l'ensemble quotient correspondant $\mathcal{M}$. (Par $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ on désigne les classes d'équivalence contenant les ensembles A et B.)

99*. Montrer que l'espace métrique $\mathcal{M}$ de l'exercice 98 est complet.

100. Désignons par R et L les sous-espaces de $\mathcal{M}$ (voir exercice 98) constitués respectivement des classes d'ensembles mesurables et des classes d'ensembles élémentaires (c'est-à-dire appartenant à $R(S)$). Montrer que L est confondu avec l'adhérence de R.

101*. Supposons que S est un sous-anneau d'intervalles semi-ouverts $[a, b[$ de $[0, 1]$, $\mathcal{M}$ l'espace de l'exercice 98. Montrer que $\mathcal{M}$ est connexe et non compact.

102. Soient S_1 le semi-anneau des intervalles semi-ouverts $[a, b[$ de $[0, 1]$, S_2 le semi-anneau des rectangles de la forme $[a, b[\times[c, d[$ du carré unité.

a)* Montrer que les espaces L_1 et L_2 correspondants (voir exercice 100) sont isométriques.

b) Les espaces S_1 et S_2 sont-ils isométriques ?

c)** R_1 et R_2 sont-ils isométriques ?

103°. Soit $\{E_n\}$ une suite d'ensembles mesurables-Lebesgue sur la droite. Les limites supérieure et inférieure de la suite $\{E_n\}$ sont-elles des ensembles mesurables ? (Voir exercice 81.)

104. Soient A_n une suite d'ensembles mesurables et $\sum \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$.

105°. Montrer que les boréliens sont mesurables-Lebesgue (voir exercice 87).

106. Montrer que tout ensemble mesurable-Lebesgue de la droite est la réunion d'un borélien et d'un ensemble de mesure nulle.

107. Soient X le carré unité du plan, S le semi-anneau des rectangles de X de la forme

$$T_{ab} = \{a \leqslant x < b,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Posons $m(T_{ab}) = b-a$. Expliciter le prolongement-Lebesgue de la mesure μ.

108. Dans les hypothèses et les notations de l'exercice 107, montrer que l'ensemble $\tilde{T} = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1/2\}$ n'est pas mesurable et calculer sa mesure extérieure.

109. Trouver la mesure de Lebesgue des parties de l'intervalle $[0, 1]$ composées des nombres dans le symbôle décimal desquels le chiffre 2 figure avant le chiffre 3.

110. Trouver la mesure de Lebesgue des parties du carré unité du plan, composé des points (x, y) tels que $|\sin x| < 1/2$ et $\cos(x+y)$ est irrationnel.

111. Trouver la mesure de Lebesgue des parties du carré unité du plan, composé de points dont les coordonnées cartésiennes et scalaires sont irrationnelles.

112*. Considérons dans le carré unité du plan un système (qui n'est pas un semi-anneau) de rectangles verticaux et horizontaux dont la longueur ou la largeur est égale à un et associons à chaque rectangle une mesure égale à sa surface. Indiquer au moins deux prolongements distincts de la mesure à l'algèbre engendrée par ce système de rectangles.

113*. Soient μ une mesure définie sur un semi-anneau unitaire X et μ^* la mesure extérieure associée à μ. On dit qu'un ensemble $A \subset X$ est *mesurable-Carathéodory* si pour toute partie $Z \subset X$ on a

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Montrer que l'ensemble A est mesurable-Lebesgue si et seulement s'il est mesurable-Carathéodory.

114*. Soit m une mesure σ-additive définie sur un semi-anneau. On dit qu'un ensemble A est un *ensemble de σ-univocité* pour la mesure m si

1) il existe un prolongement σ-additif λ de la mesure m défini sur A ;

2) pour deux prolongements σ-additifs λ_1 et λ_2 quelconques on a

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A).$$

2) Montrer que tout ensemble A mesurable-Lebesgue est un ensemble de σ-univocité pour la mesure m.

b) Montrer qu'un système d'ensembles mesurables-Lebesgue épuise tout le système des ensembles de σ-univocité pour la mesure initiale m.

115*. Supposons que chaque ensemble X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ est constitué des chiffres 0, 1, 2, ..., 9. Définissons une mesure μ_n sur X_n en posant $\mu_n(Y) = \frac{1}{10}$ card Y. Supposons que μ est la mesure produit des mesures μ_n sur $X = \sqcap X_n$. Considérons l'application de X dans l'intervalle [0, 1] : $\{x_n\} \mapsto 0,\ x_1x_2x_3 \ldots$ (fraction décimale indéfinie). Montrer que cette application envoie la mesure μ dans la mesure ordinaire de Lebesgue sur [0, 1].

3. Constructions de mesures.

116*. Construire un exemple d'ensemble non mesurable-Lebesgue sur la droite.

117*. Construire un exemple d'ensemble non mesurable-Lebesgue sur le plan.

118*. Construire un exemple d'ensemble mesurable-Lebesgue sur le plan, dont les projections sur les axes de coordonnées ne sont pas mesurables.

119.** Soient μ une mesure de Lebesgue, X une partie de l'intervalle [0, 1]. On dit qu'un point $x \in X$ est un *point de densité de l'ensemble* X si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu\{X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}}{2\varepsilon} = 1.$$

Montrer que presque tous les points de l'ensemble X sont des points de densité.

120. Décrire toutes les parties E de l'intervalle [0, 1] dont les fonctions caractéristiques $\chi_E(x)$ sont intégrables-Riemann.

121°. Soit X un espace muni d'une mesure σ-additive. Montrer que les parties de mesure nulle de X forment un σ-anneau.

122°. Montrer que les ensembles dénombrables de la droite possèdent une mesure de Lebesgue nulle. Citer un exemple d'ensemble non dénombrable de la droite possédant une mesure de Lebesgue nulle.

123°. Montrer que l'ensemble de toutes les charges sur une σ-algèbre $\mathfrak{A}$ est un espace vectoriel complet pour la distance $d(\nu_1, \nu_2) = \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\nu_1(A) - \nu_2(A)|$.

124. Pour toute partie M de l'espace $\mathbf{R}^n$ désignons par $M - M$ l'ensemble

$$M - M = \{x - y : \ x \in M, \ y \in M\}.$$

Montrer que si M est mesurable et admet une mesure de Lebesgue positive, alors l'ensemble $M - M$ contient un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$.

125°. Supposons que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ est un ensemble dénombrable et qu'à chacun de ses éléments x_i est associé un nombre $p_i \geqslant 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Pour toute partie $A \subset X$ posons $m(A) = \sum_{n \in N_A} p_n$, où $N_A = \{i : \ x_i \in A\}$.

Montrer que m est une mesure σ-additive sur l'algèbre de toutes les parties de X.

126*. Citer un exemple de mesure finiment-additive mais non σ-additive.

127.** Montrer que la mesure de Wiener est σ-additive.

128*. Calculer la mesure de Wiener de l'ensemble des fonctions $f \in C[a, b]$ telles que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

129. Définissons une mesure μ sur l'intervalle [0, 1] par la formule $\mu([\alpha, \beta[) = \log_2 \frac{1+\beta}{1+\alpha}$.

Montrer que cette mesure est invariante par la transformation f : $x \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\}$, où $\{\cdot\}$ représente la partie fractionnaire d'un nombre (c'est-à-dire $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. Ceci ne veut pas dire que $\mu(f(A)) = \mu(A)$).

130. Tout nombre réel $x \in [0, 1]$ peut être représenté par une fraction continue $x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ldots}}$ (les fractions sont finies si les nombres sont rationnels et infinies s'ils sont irrationnels).

a) Montrer que la transformation de l'exercice 129 en termes de suites $\{n_k\}$ est de la forme $\{n_k\} \mapsto \{n_{k+1}\}$.

b) Dans l'espace des suites, calculer la mesure correspondant à la mesure μ de l'exercice 129.

131°. Montrer que dans la définition de la charge la condition de convergence absolue de la série $\sum \nu(A_n)$ peut être remplacée par la condition de convergence simple (voir page 21).

132. Calculer la variation de la charge complexe $\nu = \mu_1 + i\mu_2$ sur un ensemble A sachant que

a) les mesures μ_1 et μ_2 sont étrangères sur A ;

b) $\mu_1 = \mu_2$ sur A.

133. Soit ν une charge complexe sur une σ-algèbre $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Montrer que les parties réelles et imaginaires de ν sont des charges sur $\mathfrak{A}$.

134*. Soit ν une charge sur une σ-algèbre $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Montrer que $\sup\limits_{A \in \mathfrak{A}} \nu(A) < +\infty$, $\inf\limits_{A \in \mathfrak{A}} \nu(A) > -\infty$.

135*. Montrer que les bornes supérieure et inférieure mentionnées dans l'exercice 134 sont atteintes sur des ensembles A_+ et A_- de $\mathfrak{A}$.

136. Dans les notations de l'exercice 135* montrer que la fonction ν (resp. $-\nu$) est une mesure σ-additive sur $\mathfrak{A} \cap \mathcal{P}(A_+)$ (resp. sur $\mathfrak{A} \cap \mathcal{P}(A_-)$).

137. Dans les notations de l'exercice 135* montrer que pour tout $A \in \mathfrak{A}$ on a $\nu(A) = \nu(A \cap A_+) + \nu(A \cap A_-)$.

138. Montrer que la variation $|\nu|$ de la charge est finie et σ-additive.

§ 2. Fonctions mesurables

1. Propriétés des fonctions mesurables.

139°. Soient X un espace mesuré, f une fonction à valeurs réelles définie sur X. Montrer que les propriétés suivantes de f sont équivalentes :

a) l'ensemble $\{x \in X : f(x) > a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbf{R}$;

b) l'ensemble $\{x \in X : f(x) \geqslant a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbf{R}$;

c) l'ensemble $\{x \in X : f(x) < a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbf{R}$;

d) l'ensemble $\{x \in X : f(x) \leqslant a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbf{R}$.

140. Montrer que dans les hypothèses de l'exercice 139, la réalisation de l'une quelconque des conditions a) à d) équivaut à la condition

e) l'ensemble $f^{-1}(B)$, où $B \subset \mathbf{R}$ est un borélien quelconque, est mesurable.

141°. Soit f une fonction mesurable et non nulle. Montrer que la fonction $1/f$ est mesurable.

142°. Montrer que $|f|$ est une fonction mesurable si f l'est.

143. Soient $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ une fonction continue à valeurs réelles définie sur un espace réel de dimension n, $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ des fonctions mesurables. Montrer que la fonction $h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ est une fonction mesurable.

144*. Soient $g(x)$ une fonction mesurable définie sur la droite réelle, f une fonction réelle continue. Montrer que la fonction $h(x) = g(f(x))$ n'est généralement pas mesurable.

145. Soit $f(x)$ une fonction réelle. Indiquer les nombres n pour lesquels la mesurabilité de $[f(x)]^n$ entraîne celle de $f(x)$.

146. Soit $f(x)$ une fonction partout dérivable sur $[0, 1]$. Montrer que $f'(x)$ est mesurable-Lebesgue.

147. Soit $f(x)$ une application biunivoque de Cantor de l'intervalle $[0, 1]$ sur un carré : pour $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ binaire irrationnel on a

$f(x) = (y_1, y_2)$, $y_1 = (x_1, x_3, \ldots)$, $y_2 = (x_2, x_4, \ldots)$. Montrer que l'application $f(x)$ envoie tout sous-ensemble mesurable de l'intervalle fermé $[0, 1]$ dans un sous-ensemble mesurable du carré et laisse la mesure invariante.

148. On dit qu'une fonction $f(x)$ définie sur la droite réelle est *borélienne* si pour tout $a \in \mathbf{R}$ l'ensemble $\{x \in R : f(x) < a\}$ est borélien (cf. exercice 106). Montrer que toute fonction mesurable devient borélienne par correction sur un ensemble de mesure nulle.

149*. *C-propriété de Lusine.* Soient μ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$, f une fonction mesurable presque partout finie sur cet intervalle. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $F \subset [0, 1]$ tel que la restriction de la fonction f à l'ensemble F est continue et $\mu(F) > 1-\varepsilon$.

150*. Soit f une fonction mesurable définie sur la droite réelle. On dit qu'un point $x \in \mathbf{R}$ est un *point de Lebesgue* de la fonction f s'il existe un sous-ensemble $X \subset \mathbf{R}$ mesurable-Lebesgue contenant et admettant x pour point de densité, tel que la restriction $f|_X$ soit continue en x. Montrer que presque tous les points de la droite sont des points de Lebesgue pour la fonction f.

151. Soient $x = 0, n_1n_2n_3 \ldots$ et $y = 0, m_1m_2m_3 \ldots$ les symboles décimaux des nombres x et y de l'intervalle $[0, 1]$. Posons $f(x, y) = k$ si $n_k = m_k$ et $n_i \neq m_i$ pour $i < k$; si $n_k \neq m_k$ pour tous les k, on conviendra que $f(x) = \infty$. Montrer que la fonction f est mesurable-Lebesgue et presque partout finie.

152*. Soient $f(x)$ une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$, $n(c)$ le nombre de zéros de l'équation $f(x) = c$. Montrer que la fonction $n(c)$ est mesurable-Lebesgue.

153°. Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que les fonctions $\sup\limits_n f_n(x)$ et $\inf\limits_n f_n(x)$ sont mesurables.

154. Dans les notations de l'exercice 153, montrer que les fonctions $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x)$ et $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x)$ sont mesurables.

155. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble de tous les points x où existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ est mesurable.

156°. Soit f une fonction mesurable. Montrer que sa partie positive $f^+ = \max(f, 0)$ et sa partie négative $f^- = -\min(f, 0)$ sont des fonctions mesurables.

157. On dit que des fonctions réelles f et g mesurables par rapport à des mesures μ et ν sont *équi-mesurables* si pour tout $c > 0$ on a $\mu\{x : f(x) < c\} = \nu\{y : g(y) < c\}$.

Montrer que si f est une fonction mesurable par rapport à une mesure μ il existe une fonction g non décroissante continue à gauche sur l'intervalle $[0, \mu(X)]$ telle que f et g soient équi-mesurables.

158. Dans les hypothèses de l'exercice 157, montrer l'unicité de la fonction $g(x)$.

159. On dit qu'une fonction à valeurs complexes $f(x) = u(x)+iv(x)$ est mesurable si sa partie réelle $u(x)$ et sa partie imaginaire $v(x)$ le sont. Montrer que le module et l'argument de $f(x)$ sont mesurables.

160. Montrer que pour qu'une fonction $f(x)$ à valeurs complexes soit mesurable il est nécessaire et suffisant que tous les ensembles de la forme $A_{r,z} = \{x : |f(x)-z| \leqslant r\}$, où $z \in \mathbf{C}$, $r \geqslant 0$, le soient.

161. On dit qu'une fonction vectorielle f à valeurs dans un espace V de dimension finie est *mesurable* si les coordonnées de $f(x)$ sont mesurables dans une base de V. Montrer que cette définition est indépendante du choix de la base.

2. Convergence des fonctions mesurables.

162°. Montrer que la suite $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$ converge partout sur $\mathbf{R}$ vers 0 mais pas uniformément.

163°. Etudier la convergence et la convergence uniforme de la suite $f_n(x) = x^n$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

164°. Montrer que deux fonctions continues sur un intervalle sont équivalentes pour la mesure de Lebesgue si et seulement si elles sont identiquement égales.

165. Construire une fonction mesurable-Lebesgue sur un intervalle fermé qui ne soit équivalente à aucune fonction continue.

166°. Montrer que f est équivalente à g sachant que $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ et $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} g$.

167°. Soit $f_n(x) = \frac{n \sin x}{1+n^2 \sin^2 x}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Pour $\delta > 0$ donné expliciter *l'ensemble d'Egorov* E_δ sur lequel la suite f_n converge uniformément.

168*. Numérotons tous les nombres rationnels de l'intervalle $[0, 1]$ et écrivons le k-ième nombre r_k sous forme d'une fraction irréductible $r_k = p_k/q_k$. Posons $f_k(x) = \exp\{-(p_k-xq_k)^2\}$. Montrer que $f_k \to 0$ pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} f_k(x)$ n'existe en aucun point de $[0, 1]$.

169. Dans les hypothèses de l'exercice précédent indiquer une suite partielle convergeant presque partout vers 0.

170. Sur l'intervalle $[0, 1]$ soient

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \frac{i-1}{k} \leqslant x < \frac{i}{k}, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,; \; k = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{dans les autres points} \end{cases}$$

et $g_n(x) = f_i^{(k)}(x)$, où i et k sont choisis à partir de la condition $n = \frac{k(k-1)}{2}+i$. Montrer que $g_n \to 0$ en mesure mais que $\lim g_n(x)$ n'existe en aucun point.

171. Soient $f_n \xrightarrow{\mu} h$ et $f_n \xrightarrow{\mu} g$. Montrer que h et g sont équivalentes pour la mesure μ.

172*. *Théorème de Lusine.* Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle sur un intervalle $[a, b]$ soit mesurable-Lebesgue est que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue différente de f sur un ensemble de mesure $\leqslant \varepsilon$.

173*. Le théorème de Lusine (voir exercice 172*) nous dit que toute fonction f mesurable sur un intervalle $[a, b]$ est la limite presque partout d'une suite $\{f_n\}$ de fonctions continues. Cette suite peut-elle toujours être choisie monotone ?

174*. La *fonction de Dirichlet*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \quad \text{est irrationnel,} \\ 1 & \text{si} \quad x \quad \text{est rationnel} \end{cases}$$

peut être obtenue à partir de fonctions continues par un double passage à la limite :

$$\psi(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} [\cos(2\pi n!\ x)]^m.$$

Peut-on l'obtenir à partir de fonctions continues moyennant un seul passage à la limite ?

175. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction simple (c'est-à-dire une fonction prenant un nombre de valeurs au plus dénombrable) soit mesurable est que tous ses *ensembles de niveau*

$$L_c(f) = \{x \in X : f(x) = c\}$$

le soient.

Ceci est-il vrai pour des fonctions quelconques ?

176°. Montrer que toute fonction mesurable peut être représentée sous forme d'une limite uniforme de fonctions simples mesurables.

177. Définissons sur l'intervalle $[0, 1]$ une fonction $f(x)$ comme suit. Si $x = 0, n_1 n_2 n_3 \ldots$ est le symbole décimal de x, alors $f(x) = \max_i n_i$. Montrer que $f(x)$ est mesurable et presque partout constante.

178. Montrer dans les hypothèses de l'exercice 177 que la fonction $f(x) = \overline{\lim_{i \to \infty}}\, n_i$ est partout définie et presque partout constante.

179. Soit μ la mesure de Wiener sur l'espace $X = C[a, b]$. Définissons sur X une fonction f en posant $f(x) = \int_a^b x(t)\, dt$.

Montrer que f est μ-mesurable.

180. Même exercice pour la fonction $f(x) = \int_a^b \varphi(x(t), t)\, dt$, où $\varphi(x, y)$ est une fonction continue de deux variables.

181. Même exercice pour la fonction $f(x) = \max_{t \in [a, b]} x(t)$.

182*. Soient X l'ensemble des entiers p-adiques (voir exercice 42), S l'algèbre des parties à la fois ouvertes et fermées de X, $\mathfrak{A} = R_\sigma(S)$. Montrer que toute fonction continue sur X est $\mathfrak{A}$-mesurable.

183*. Montrer dans les hypothèses de l'exercice 182* que tout ensemble $A \in S$ est la réunion d'un nombre fini de boules. Définissons une mesure μ sur S en posant la mesure de la boule égale au rayon de cette boule (pour les boules de rayon p^{-k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$). Montrer que la mesure μ est σ-additive.

184*. Montrer que la mesure μ de l'exercice 183* possède les propriétés suivantes :

a) $\mu(X) = 1$;

b) $\mu(A+x) = \mu(A)$ pour tous les $x \in X$.

Montrer que toute mesure sur $\mathfrak{A}$ possédant les propriétés a) et b) est confondue avec μ.

§ 3. Intégrale

1. Intégrale de Lebesgue.

185°. Montrer que si f et g sont des fonctions simples sommables, alors

a) $\int\limits_A (f(x)+g(x))\,d\mu = \int\limits_A f(x)\,d\mu + \int\limits_A g(x)\,d\mu$;

b) $\int\limits_A \alpha f(x)\,d\mu = \alpha \int\limits_A f(x)\,d\mu$ ($\alpha = \text{const}$) ;

c) si $|f(x)| \leqslant M$ presque partout sur A et $\mu(A) < \infty$, alors $\left|\int\limits_A f(x)\,d\mu\right| \leqslant M\mu(A)$.

186°. Calculer l'intégrale de Lebesgue sur l'intervalle $]0, \infty[$ des fonctions :

a) $f(x) = e^{-[x]}$,

b) $f(x) = \dfrac{1}{[x+1]\,[x+2]}$,

c) $f(x) = 1/[x]\,!$, où $[x]$ est la partie entière de x.

187. Soient $\mu(X) < \infty$ et f une fonction sommable sur X. Montrer que l'intégrale de Lebesgue $\int\limits_X f(x)\,d\mu$ peut être calculée au moyen de la formule

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_k \xi_k \mu(\{x \in X:\ t_k \leqslant f \leqslant t_{k+1}\}), \tag{1}$$

où $T = \{t_k\}$ est une partition de l'axe réel, $\lambda(T) = \sup\limits_k |t_k - t_{k+1}|$ le diamètre de la partition T, $\{\xi_k\}$ une collection quelconque de points tels que $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$. L'expression (1) s'appelle *somme intégrale de Lebesgue.*

188. Montrer que la proposition de l'exercice 187 reste en vigueur dans le cas $\mu(X) = \infty$ si l'on exige accessoirement que $\xi_k = 0$ pour tous les k pour lesquels l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ contient le point 0.

189. Supposons qu'une fonction mesurable simple f est représentée de deux façons par des combinaisons linéaires des fonctions caractéristiques des ensembles disjoints :

$$f(x) = \sum_k c_k \chi_{A_k}(x) = \sum_l d_l \chi_{B_l}(x).$$

Montrer que $\sum_k c_k\mu(A_k) = \sum_l d_l\mu(B_l)$ dans le cas où l'une de ces séries converge absolument.

190°. Soit f_n une fonction simple sur [0, 1] définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$, où $[x]$ représente la partie entière de x. Montrer que la suite $\{f_n\}$ est fondamentale et ne possède pas de limite dans l'espace $S[0, 1]$ des fonctions simples sommables, muni de la distance $d_1(f, g) = \int_0^1 |f-g|\,dx$.

191. Pour quelles valeurs des paramètres α et β la fonction $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$ définie sur l'intervalle semi-ouvert]0, 1] est-elle

a) intégrable-Lebesgue ?

b) improprement intégrable-Riemann ?

192°. Montrer que l'intégrale d'une fonction sommable non négative f sur un ensemble A est

a) non négative ;

b) nulle si et seulement si $f(x) = 0$ presque partout sur A.

193. Soient φ une fonction lisse monotone croissante sur l'intervalle $[a, b]$, ψ son inverse sur l'intervalle $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Montrer en considérant l'intégrale comme la limite de la somme de Lebesgue l'identité

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} y\psi'(y)\,dy.$$

194. Montrer que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction non négative $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est confondue avec la mesure de Lebesgue de l'ensemble définie sur le plan par les inéquations $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

195. Montrer qu'une fonction mesurable non négative f est sommable sur A si et seulement si pour toutes les fonctions simples $g \leqslant f$ les intégrales $\int_A g(x)\,d\mu(x)$ sont majorées par une même constante.

196. Pour toute fonction réelle f posons : $f_+(x) = (f(x)+|f(x)|)/2$, $f_-(x) = (|f(x)|-f(x))/2$. Montrer que la fonction f est sommable si et seulement si les fonctions f_+ et f_- le sont.

197. Montrer qu'une fonction f non négative mesurable est sommable si et seulement si $\sup \int_A f(x)\,d\mu(x) < \infty$, où la borne supérieure est prise sur tous les ensembles A de mesure finie sur lesquelles la fonction f est majorée.

198. Soit $\mu(x) < \infty$. Montrer qu'une fonction f mesurable non négative sur X est sommable si et seulement si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu\{x \in X\colon f(x) \geqslant 2^n\}$$

est convergente.

199. Montrer qu'une fonction non négative bornée sur un ensemble de mesure infinie est sommable si et seulement si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu\left(\left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{2^n}\right\}\right)$$

converge.

200°. Calculer l'intégrale de Lebesgue sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ des fonctions $f(x)$:

a) $f(x) = \sin x$;

b) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \text{ est rationnel,} \\ \cos x & \text{si } x \text{ est irrationnel ;} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } \cos x \text{ est rationnel,} \\ \sin^2 x & \text{si } \cos x \text{ est irrationnel ;} \end{cases}$

d) sur le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ de la fonction

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \text{ est irrationnel,} \\ 0 & \text{si } xy \text{ est rationnel.} \end{cases}$$

201*. Montrer qu'une fonction est intégrable-Riemann sur un intervalle $[a, b]$ si et seulement si elle est bornée et presque partout continue.

202*. Montrer que l'intégrale de Lebesgue sur R^n de la fonction

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left\{-\sum a_{ij} x_i x_j\right\}$$

est finie si et seulement si la matrice symétrique $A = ||a_{ij}||$ est définie positive. Montrer que l'intégrale est alors égale à $\sqrt{\det(\pi \cdot A^{-1})}$.

203.** Calculer par rapport à la mesure de Wiener sur $C[0, 1]$ l'intégrale de la fonction

$$F(x) = \exp\left\{-ax^2(0) - b^2 \int_0^1 x^2(t)\, dt\right\}.$$

204*. Désignons par $C_0[0, 1]$ l'espace des fonctions $x(t)$ continues sur l'intervalle $[0, 1]$ et telles que $x(0) = 0$. Montrer que l'espace $C[0, 1]$ peut être identifié au produit $\mathbf{R} \times C_0[0, 1]$ de façon telle que la mesure de Wiener μ se transforme en $\mu_1 \times \mu_0$, où μ est la mesure ordinaire de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et μ_0 une mesure sur $C_0[0, 1]$.

205.** Soit μ_0 la mesure de l'exercice 204*. Calculer les intégrales :

a) $\displaystyle\int_{C_0[0,1]} d\mu_0(x)$;

b) $\displaystyle\int_{C_0[0,1]} \left[\int_0^1 x(t)\, dt\right] d\mu_0(x)$;

c) $\displaystyle\int_{C_0[0,1]} \left[\int_0^1 x^2(t)\, dt\right] d\mu_0(x)$.

206. a) Supposons que f est une fonction mesurable bornée sur un ensemble X et qu'il existe des constantes $A > 0$ et $\alpha < 1$ telles que $\mu\{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\} < A/\varepsilon^\alpha$ pour $\varepsilon > 0$. Montrer que la fonction f est intégrable par rapport à la mesure μ.

b) Soit donnée une fonction mesurable f sur un ensemble X de mesure finie. Supposons qu'il existe des constantes $A > 0$ et $\alpha > 1$ telles que $\mu\{x \in X : |f(x)| > M\} < A/M^\alpha$ pour $M > 0$. Montrer que la fonction f est intégrable par rapport à la mesure μ.

207. a) Montrer que la décomposition de presque tout nombre réel x en une fraction continue (voir exercice 130) nous conduit à une suite indéfinie $\{n_k\}$.

b)* Soit donnée une suite de nombres positifs $\{a_k\}$. Considérons l'ensemble $M(\{a_k\})$ des réels $x \in [0, 1]$ pour lesquels la décomposition en une fraction continue est telle que $n_k \leqslant a_k$ pour tous les k. Quelle condition doit remplir $\{a_k\}$ pour que la mesure de l'ensemble $M(\{a_k\})$ soit nulle ?

2. Fonctions à variation bornée et intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

208°. Prouver les propriétés suivantes de la variation totale :

a) pour toute constante α et toute fonction f à variation bornée on a $\mathrm{Var}_a^b(\alpha f) = |\alpha| \mathrm{Var}_a^b(f)$;

b) si f et g sont des fonctions à variation bornée, alors $f+g$ est également une fonction à variation bornée et de plus

$$\mathrm{Var}_a^b(f+g) \leqslant \mathrm{Var}_a^b(f)+\mathrm{Var}_a^b(g) ;$$

c) si $a < b < c$ et f est une fonction à variation bornée sur l'intervalle $[a, c]$ alors

$$\mathrm{Var}_a^b(f)+\mathrm{Var}_b^c(f) = \mathrm{Var}_a^c(f) ;$$

d) si f est une fonction monotone, alors

$$\mathrm{Var}_a^b(f) = |f(a)-f(b)|.$$

209°. Vérifier si est bornée la variation des fonctions suivantes sur l'intervalle $[0, 1]$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0 ; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$

210. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction à variation bornée sur un intervalle fermé est au plus dénombrable et n'est composé que de points de discontinuité de première espèce.

211. Montrer que toute fonction à variation bornée sur un intervalle fermé est mesurable-Lebesgue.

212°. Montrer qu'une fonction dont la dérivée est bornée sur un intervalle fermé est une fonction à variation bornée.

213*. Supposons qu'une fonction f possède une dérivée intégrable-Riemann sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$\mathrm{Var}_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

214°. Trouver les variations suivantes :

$$\mathrm{Var}_0^{50}(e^x), \quad \mathrm{Var}_1^2(\ln x), \quad \mathrm{Var}_0^{4\pi}(\cos x), \quad \mathrm{Var}_{-1}^1(x-x^3).$$

215. Soit Φ une fonction continue à gauche à variation bornée sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que la fonction Φ se représente de façon unique par la somme $\Phi = \Phi_0+\Phi_1$, où Φ_0 est une fonction continue à variation bornée et Φ_1 une fonction dite *fonction de sauts* : $\Phi_1(x) = \sum_{k=1} c_k\theta(x-a_k)$, où $\{a_k\}$ est un sous-ensemble fini ou dénombrable quelconque de $[a, b]$, $\theta(x)$ la *fonction de Heaviside* qui est définie par $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}$ et $\{c_k\}$ une suite numérique quelconque telle que $\sum_k |c_k| < \infty$.

216. Montrer que

a) le produit de deux fonctions à variation bornée est une fonction à variation bornée ;

b) si $f(x) \geqslant \alpha > 0$ et f est une fonction à variation bornée, il en est de même de la fonction $1/f$.

217. La fonction $\varphi(f)$ sera-t-elle à variation bornée sur l'intervalle $[0, 1]$ si la fonction f l'est et la fonction φ

a) est continue sur l'axe numérique tout entier ?

b) est à variation bornée sur l'axe numérique tout entier ?

218°. Soient E un sous-ensemble de l'intervalle $[0, 1]$, χ la fonction caractéristique de E. Montrer que χ est à variation bornée si et seulement si la frontière de E est un ensemble fini.

219*. Soient f et g deux fonctions continues à variation bornée sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que l'ensemble $\{f(x), g(x)\}$, $x \in [a, b]$, ne peut recouvrir un carré. Ceci est-il vrai si l'on s'affranchit de la condition de variation bornée ?

220°. Etablir les propriétés suivantes de l'intégrale de Riemann-Stieltjes ;

a) si Φ est une fonction à variation bornée et f une fonction intégrable par rapport à Φ, alors

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\Phi(x) \right| \leqslant \sup |f(x)|\, \mathrm{Var}_a^b(\Phi) ;$$

b) si Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions à variation bornée et f une fonction intégrable par rapport à Φ_1 et Φ_2, alors elle l'est aussi par rapport à Φ, où $\Phi = \Phi_1+\Phi_2$, et

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi_1(x) + \int_a^b f(x)\, d\Phi_2(x).$$

221. Soient Φ une fonction à variation bornée sur un intervalle $[a, b]$ discontinue en $c \in]a, b[$, f une fonction intégrable au sens de Riemann-Stieltjes par rapport à Φ. Montrer que la fonction f est continue en c.

222. Montrer que si Φ est une fonction à variation bornée sur un intervalle $[a, b]$, non nulle en un nombre fini ou dénombrable de points de $]a, b[$, alors pour toute fonction f continue sur $[a, b]$ on a

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = 0.$$

223. Montrer que si une fonction f est continue, alors l'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)\, d\Phi(x)$ ne dépend pas des valeurs prises par la fonction Φ aux points de discontinuité appartenant à $]a, b[$.

224. Etablir la formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Stieltjes :

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\, df(x).$$

225. Soient $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, $g(x)$ une fonction possédant partout sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points $c_1, \ldots, c_k$ une dérivée sommable-Riemann $g'(x)$. Montrer que sous ces conditions l'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f\, dg$ existe et est donnée par la formule

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b fg'\, dx + f(a)\,[g(a+0)-g(a)] +$$
$$+ f(b)\,[g(b)-g(b-0)] + \sum_{m=1}^{k} f(c_m)\,[g(c_m+0)-g(c_m-0)].$$

226°. Soit μ_φ une mesure engendrée par une fonction continue monotone φ. Montrer que l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} x\, d\mu_\varphi$ est égale à l'intégrale de Stieltjes $\int_a^b x\, d\varphi(x)$ et calculer-la.

227°. Calculer les intégrales de Riemann-Stieltjes

$$L_1 = \int_{-1}^{3} x\, dg(x)\,; \quad g(x) = \begin{cases} 0\,; & x = -1, \\ 1\,; & x \in\,]-1, 2[, \\ -1\,; & x \in [2, 3], \end{cases}$$

$$I_2 = \int_0^2 x^2\, dg(x), \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, 1/2[, \\ 0, & x \in [1/2, 3/2[, \\ 2, & x = 3/2, \\ -2, & x \in\,]3/2, 2]. \end{cases}$$

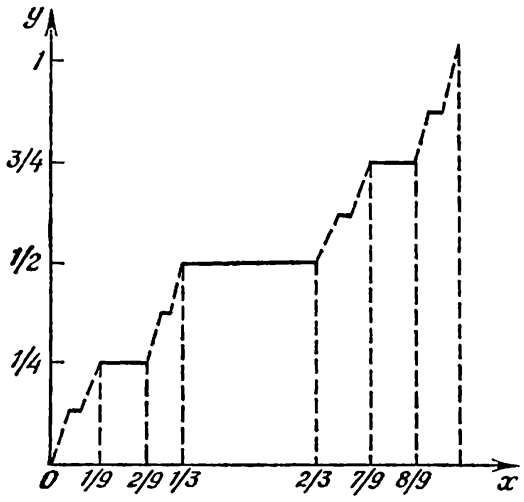
228°. Calculer les intégrales

$$I_1 = \int_{-2}^{2} x\,dg(x), \quad I_2 = 2\int_{-2}^{2} x^2\,dg(x), \quad I_3 = \int_{-2}^{2} (x^3+1)\,dg(x),$$

$$\text{où} \quad g(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2, -1], \\ 2, & x \in]-1, 0[, \\ x^2+3, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

229°. Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On appelle *indicatrice de Banach* $N_f(y)$ de la fonction f le nombre de zéros de l'équation $f(x) = y$ (si ce nombre est infini on convient que $N_f(y) = \infty$). Montrer que $N_f(y)$ est une fonction mesurable-Lebesgue de y (voir exercice 152*) et que $\int_{-\infty}^{+\infty} N_f(y)\,dy = \mathrm{Var}_0^1(f)$ si l'un au moins des membres de cette égalité a un sens.

230*. Soit $\varphi(x)$ un « escalier » de Cantor c'est-à-dire une fonction continue monotone sur l'intervalle $[0, 1]$, constante sur tout intervalle complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor et prenant les valeurs $1/2^k$, $3/2^k$, $5/2^k$, ..., $(2^k-1)/2^k$ sur les intervalles de rang k.



Calculer les intégrales :

a) $\int_0^1 x^k\,d\varphi(x)$; b) $\int_0^1 e^x\,d\varphi(x)$; c) $\int_0^1 \sin \pi x\,d\varphi(x)$.

3. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue.

231°. a) Montrer que dans l'espace $L_1(X, \mu)$ la convergence entraîne la convergence en mesure.

b) La réciproque est-elle vraie ?

232°. Soit $f_n \in L_1(X, \mu)$ une suite convergeant uniformément vers une fonction $f(x)$. Prouver que si $\mu(x) < \infty$, alors $f_n \to f$ dans l'espace $L_1(X, \mu)$. Ceci est-il vrai dans le cas où $\mu(X) = \infty$?

233. Construire une suite de fonctions $f_n \in L_1[0, 1]$ possédant les propriétés suivantes :

a) $f_n(x) \to 0$ pour tous les $x \in [0, 1]$;

b) $\int_0^1 |f_n(x)|\, dx \leqslant C$ pour tous les n ;

c) la suite $\{f_n\}$ n'admet pas de limite dans $L_1[0, 1]$.

234°. Soit X un ensemble de mesure finie μ. Pour des fonctions mesurables f et g quelconques posons

$$\varrho(f, g) = \int_X \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\, d\mu(x).$$

Montrer que la fonction ϱ jouit de toutes les propriétés de la distance sauf la séparabilité et que l'espace métrique $M[0, 1]$ correspondant est constitué de classes de fonctions équivalentes.

235. a) Montrer que dans $M[0, 1]$ la convergence (voir exercice 234°) est confondue avec la convergence en mesure et que l'espace $M[0, 1]$ est complet pour la métrique $\varrho(f, g)$.

b) Montrer que la fonction

$$\varrho_1(f, g) = \int_X \operatorname{arctg} |f(x)-g(x)|\, d\mu(x)$$

définit une métrique sur l'espace $M[0, 1]$ (voir exercice 234°) et que la convergence pour cette métrique est confondue avec la convergence en mesure.

236. Montrer que l'ensemble des fonctions caractéristiques des parties mesurables d'un ensemble quelconque est fermé dans $L_1(X, \mu)$.

237. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions non négatives sommables convergeant presque partout vers une fonction sommable f. Montrer que si $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$ pour $n \to \infty$, alors $f_n \to f$ au sens de la convergence dans l'espace $L_1(X, \mu)$.

238*. Soient $f \in L_1(X, \mu)$ et $\mu(X) = 1$. Montrer qu'il existe une fonction monotone $g(t) \in L_1[0, 1]$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$

$$\inf_{\mu(A)=t} \int_A f(x)\, d\mu(x) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau,$$

$$\sup_{\mu(A)=t} \int_A f(x)\, d\mu(x) = \int_{1-t}^1 g(\tau)\, d\tau.$$

239. Montrer que pour l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \sin x \sin y \, dx \, dy$$

existent les intégrales itérées et que les valeurs de ces intégrales sont confondues. L'intégrale double existe-t-elle ?

240. Montrer que pour l'intégrale double

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \, dy$$

existent les deux intégrales itérées mais que leurs valeurs sont différentes.

241. Montrer que pour l'intégrale double

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, dx \, dy$$

les deux intégrales itérées existent et leurs valeurs sont confondues mais l'intégrale double n'existe pas.

242. Posons

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{pour} \quad \frac{1}{2^n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}; \quad \frac{1}{2^n} \leqslant y < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{2n+1} & \text{pour} \quad \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^n}; \quad \frac{1}{2^n} \leqslant y < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy.$$

243.** Soit μ une mesure borélienne non nulle sur l'ensemble des réels telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$ la mesure μ_t définie par la formule $\mu_t(A) = \mu(A+t)$ est équivalente à μ. (De telles mesures sont dites *quasi invariantes par translation.*) Montrer que la mesure μ est équivalente à la mesure de Lebesgue.

244*. Soient μ une mesure sur X, f_1, f_2 des fonctions μ-sommables réelles sur X. Définissons les charges $\nu_i = f_i\mu$ par la formule $\nu_i(A) = \int_A f_i \, d\mu$, $i = 1, 2$. Montrer que ν_1 et ν_2 sont équivalentes si et seulement si $\mu(N_1 \triangle N_2) = 0$, où $N_i = \{x \in X : f_i(x) \neq 0\}$.

245*. Soient μ une mesure σ-finie sur X, ν une mesure définie sur la même σ-algèbre et absolument continue par rapport à μ (c'est-à-dire $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$). Montrer qu'il existe une fonction ϱ non négative μ-mesurable telle que $\nu(A) = \int_A \varrho(x) \, d\mu(x)$ pour tout ensemble mesurable

A (les deux membres de l'égalité peuvent prendre simultanément la valeur $+\infty$).

246*. Montrer que dans la droite réelle $\mathbf{R}$ il n'existe pas d'ensemble mesurable-Lebesgue tel que pour tout intervalle

$$\mu(A \cap \Delta) = \frac{1}{2}\mu(\Delta).$$

247*. Soit $f \in L_1\,]a, b]$. Montrer que la fonction $F(x) = \int_a^x f(x)\,d\mu(x)$ est presque partout dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour presque tous les $x \in [a, b]$.

248.** On dit qu'une fonction réelle F sur un intervalle $[a, b]$ est *absolument continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute famille d'intervalles $\{\Delta_i\}$, $\Delta_i =]a_i, b_i[$ $1 \leqslant i \leqslant n$ de somme des longueurs $< \delta$, on a $\sum_{i=1}^{n} |F(a_i) - F(b_i)| < \varepsilon$. Montrer que

a) la fonction absolument continue F est presque partout dérivable ;

b) la dérivée $f(x) = F'(x)$ est sommable sur l'intervalle $[a, b]$;

c) la formule de Newton-Leibniz

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,d\mu(x)$$

a lieu.

249°. Montrer que les ensembles suivants sont denses dans l'espace $L_1[0, 1]$:

a) l'ensemble $S(0, 1)$ des fonctions constantes par morceaux ayant un nombre fini de discontinuités ;

b) l'ensemble des fonctions continues linéaires par morceaux présentant un nombre fini de sommets

c) l'ensemble des polynômes $P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$;

d) l'ensemble des polynômes trigonométriques

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi i k x}.$$

250. Montrer que les ensembles suivants sont denses dans l'espace $L_1(\mathbf{R})$:

a) les fonctions à support borné constantes par morceaux ;

b) les fonctions à support borné continues ;

c)** l'ensemble des fonctions de la forme $P(x)e^{-x^2}$, où P est un polynôme.

251. Soit $f \in L_1(\mathbf{R})$. Montrer que $\int_{\mathbf{R}} |f(x+\varepsilon) - f(x)|\,dx \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$. En d'autres termes la translation est une opération continue sur $L_1(\mathbf{R})$.

252. On appelle *produit de convolution* ou *convolée* des fonctions f_1 et f_2 sur la droite la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,f_2(x-t)\,dt.$$

a) Montrer que si f_1 et f_2 appartiennent à $L_1(\mathbf{R})$, l'intégrant est sommable pour presque tous les x et la convolée f appartient aussi à l'espace $L_1(\mathbf{R})$.

b) Montrer que si l'une des fonctions f_1 ou f_2 est bornée et l'autre sommable, alors la convolée f est continue.

253. Montrer que si l'intégrale d'une fonction sommable f étendue à un intervalle fermé quelconque est nulle, alors f est presque partout nulle.

CHAPITRE 3

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES ET OPÉRATEURS LINÉAIRES

§ 1. Théorie générale

1. Topologie, convexité et semi-normes.

254°. Montrer que dans un e.v.t. on peut définir une topologie par la donnée d'un système de voisinages de 0.

255. Montrer que dans tout e.v.t. un ensemble fermé X et un point $x \notin X$ possèdent des voisinages disjoints.

256. Soient données deux normes $p_1(x)$ et $p_2(x)$ dans un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une constante positive C telle que

$$p_1(x) \leqslant Cp_2(x), \quad p_2(x) \leqslant Cp_1(x).$$

257. Montrer que dans un espace vectoriel L de dimension finie il existe une seule topologie pour laquelle L est un e.v.t. séparé.

258°. Montrer que si deux normes $p(x)$ et $q(x)$ se majorent l'une l'autre : $C^{-1}p(x) \leqslant q(x) \leqslant Cp(x)$, $C > 0$, alors les systèmes de boules ouvertes $\mathring{B}_p$ et $\mathring{B}_q$ définissent la même topologie.

259°. a) Montrer que si un ensemble A est ouvert et B un ensemble quelconque, alors l'ensemble $A+B$ est ouvert.

b) Montrer que si A est un ensemble fermé et B un ensemble compact, alors l'ensemble $A+B$ est fermé.

260. Citer un exemple d'ensembles fermés A et B pour lesquels $A+B$ n'est pas un ensemble fermé.

261°. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles convexes, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres fixes. Montrer que l'ensemble $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ est convexe.

262°. Montrer que l'intersection de toute famille d'ensembles convexe est un ensemble convexe.

263. Soient A un ensemble borné quelconque sur le plan, B le disque unité $x^2+y^2 < 1$. Montrer que l'ensemble $\alpha A+\beta B$, où α et β sont des nombres positifs arbitraires, est mesurable-Lebesgue et que, si A est convexe,

$$\mu(\alpha A+\beta B) = S\alpha^2+L\alpha\beta+\pi\beta^2.$$

Quelle est la signification des coefficients S et L ?

264*. Soient $A_1, \ldots, A_k$ des ensembles convexes bornés dans l'espace $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\mu(\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k)$ est un polynôme homogène de degré n des variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

265. Soit L un espace vectoriel sur le corps K. Montrer que parmi les topologies séparées qui font de L un e.l.c. il en existe une plus forte appelée *topologie convexe nucléaire* et possédant les propriétés suivantes :

a) toute fonctionnelle linéaire (c'est-à-dire une application linéaire $f: L \to K$) est continue ;

b) la base des voisinages de 0 dans L est constituée de tous les ensembles convexes contenant 0 et découpant sur toute droite passant par 0 un intervalle de longueur positive.

266. Montrer qu'un ensemble B est boule unité pour une semi-norme p si et seulement s'il est convexe, équilibré et fermé pour la topologie convexe nucléaire (cf. exercice 265).

267. Montrer que parmi les ensembles convexes B contenant 0 et dont la fonctionnelle de Minkowski p est donnée, il existe un plus petit ensemble B_0 et un plus grand B_1 (pour l'inclusion).

268. Montrer dans les hypothèses de l'exercice 267 que B_1 est l'adhérence de B_0 pour la topologie convexe nucléaire.

269. Soient A un ensemble quelconque dans un espace vectoriel L, $c_1(A)$ l'intersection de tous les ensembles convexes de L contenant A, $c_2(A)$ l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $x = \sum_{i=1}^{n} \tau_i x_i$, où $x_i \in A$, n quelconque, τ_i non négatifs et tels que $\sum_{i=1}^{n} \tau_i = 1$. Montrer que $c_1(A) = c_2(A)$. Cet ensemble s'appelle *enveloppe convexe* et se note $c(A)$.

270. On dit qu'un ensemble M dans un e.v.t. L est *borné* si pour tout voisinage U de 0 il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon M \subset U$. Montrer que dans l'espace semi-normé $(L, \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$ l'ensemble M est borné si et seulement s'il est borné pour chaque semi-norme p_α, $\alpha \in A$.

271. Montrer que dans un e.l.c. l'enveloppe convexe d'un ensemble borné est bornée. Citer un exemple montrant que cette propriété peut ne pas avoir lieu dans un e.v.t.

272. Soit $\mathbf{R}^\infty$ l'espace de toutes les suites de nombres réels muni de la topologie de convergence en coordonnées (cf. exercice 276). Montrer que dans $\mathbf{R}^\infty$ il n'existe pas d'ensembles bornés ouverts non vides.

273. Dans l'espace $C(\mathbf{R})$ des fonctions réelles continues introduisons le système dénombrable de semi-normes $p_N(f) = \max_{|x| \leq N} |f(x)|$ et posons $d(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)}$. Pour quelles valeurs de $r > 0$ la boule de rayon r est-elle un ensemble convexe dans $C(\mathbf{R})$?

274. Sur l'espace $C(\mathbf{R})$ des fonctions réelles continues définissons une

distance par la formule

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}.$$

La topologie définie par cette distance fera-t-elle de $C(\mathbf{R})$ un e.v.t. ?

275°. Montrer que le sous-espace $BC(\mathbf{R})$ de $C(\mathbf{R})$ (voir exercice précédent) composé de toutes les fonctions continues bornées sur la droite est un e.v.t. normable ?

276. Désignons par $\mathbf{R}^\infty$ l'espace de toutes les suites de nombres réels muni de la distance

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Montrer que

a) $\mathbf{R}^\infty$ est localement convexe ;

b) $\mathbf{R}^\infty$ est dénombrablement normable ;

c) $\mathbf{R}^\infty$ n'est pas normable.

2. Espaces duals.

277°. Montrer que si une fonctionnelle linéaire est continue en un point quelconque d'un e.v.t., elle le sera en chaque point de cet espace.

278. Soit L un e.v.t.

Montrer que

a) une fonctionnelle linéaire f sur L est continue si et seulement s'il existe un ensemble ouvert $U \subset L$ et un nombre t, tels que t n'appartienne pas à l'ensemble $f(U)$;

b) une fonctionnelle linéaire f sur L est continue si et seulement si son sous-espace d'annulation $\operatorname{Ker} f = \{x : f(x) = 0\}$ est fermé dans L.

279. Montrer que si L est un espace normé de dimension infinie, il existe sur L une fonctionnelle linéaire discontinue.

280. Supposons que dans un e.v.t. L il existe un système déterminant de voisinages de 0 dont la puissance est $\leqslant \dim L$. Montrer que sur L il existe une fonctionnelle linéaire discontinue.

281°. a) Montrer qu'une fonctionnelle linéaire f sur un espace normé L est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité de L.

b)* Montrer que pour qu'une fonctionnelle linéaire f soit continue sur un espace vectoriel topologique L, il est nécessaire et, si L admet une base dénombrable en un point, suffisant qu'elle soit bornée sur tout ensemble borné.

282°. Montrer que $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ possède les propriétés d'une norme sur L'.

283. Calculer les normes des fonctionnelles suivantes sur l'espace $C[a, b]$:

a) $I(x) = \int_a^b x(t)\, dt$,

b) $I_y(x) = \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$,

c) $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(t_i)$,

où y est un élément fixé de $C[a, b]$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des points distincts de $[a, b]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

284. Montrer que la norme d'une fonctionnelle $f \in L'$ est inverse de la distance dans L de 0 à l'hyperplan $f(x) = 1$.

285°. Montrer que tout espace vectoriel normé L de dimension finie est réflexif.

286. Montrer que tout sous-espace fermé d'un espace réflexif est réflexif.

287. Montrer que l'espace c_0 de toutes les suites de nombres réels tendant vers 0, muni de la norme $p(\{x_n\}) = \max |x_n|$ n'est pas réflexif.

288°. Soit L un espace normé de dimension infinie. Montrer que la topologie faible de L n'est pas confondue avec la topologie forte.

289*. Soit $L = l_1(\mathbf{R})$ l'espace des suites de nombres réels muni de la norme $p_1(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Montrer que la convergence faible dans L est confondue avec la convergence forte (cf. exercice 288).

290. Un hyperplan P est un hyperplan *d'appui* d'un ensemble convexe K s'il a un point commun avec K et si K est situé tout entier d'un même côté de P. Montrer que l'ensemble des plans d'appui de la boule unité dans L s'applique biunivoquement sur les points de la sphère unité dans L'.

291. Supposons que dans un espace normé L la boule unité B est un polyèdre convexe. Etablir une correspondance naturelle entre les faces de dimension k de B et les faces de dimension $(n-k)$ de la boule unité B' dans L'.

292. On appelle *corps convexe* dans un e.v.t. L un ensemble convexe M de L tel que l'ensemble $\{x \in M \mid \forall y \in L \exists \varepsilon(y) \in \mathbf{R}:\ x+ty \in M$ pour $|t| < \varepsilon(y)\}$ ne soit pas vide. Deux corps convexes B et B' dans $\mathbf{R}^n$ sont dits *duals* si leurs fonctionnelles de Minkowski définissent sur $\mathbf{R}^n$ une structure d'espaces normés duals. $\Big($Nous identifions le vecteur $(a_1, \ldots, a_n)$ à la fonctionnelle $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.$\Big)$

Montrer que la section de B par un plan k-dimensionnel P est duale à la projection de B' sur ce plan.

293. Soient c l'espace de toutes les suites réelles $\{x_n\}$ admettant une limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, muni de la norme $||\{x_n\}|| = \sup |x_n|$ et c_0 le sous-espace des suites tendant vers 0. Montrer que les espaces c' et c_0' sont isomorphes à l'espace $l_1(\mathbf{R})$ et que les espaces c et c_0 ne le sont pas entre eux.

294. Montrer les isomorphismes $l_p(K)' = l_q(K)$, où $p \in [1, \infty[$, $q = p/(p-1)$, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

295. Montrer que $l_\infty(K)'$ n'est pas isomorphe à $l_1(K)$, $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$.

296. Soient L_1 et L_2 des espaces normés dont les éléments s'écrivent sous forme de vecteurs colonnes de longueur n_1 et n_2 respectivement. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ peut alors être représenté par une matrice de n_1 colonnes et n_2 lignes, de sorte que A agit sur $x \in L_1$ comme une multiplication matricielle à gauche par A. Montrer que les espaces L_1' et L_2' s'identifient aux espaces de vecteurs lignes de longueur n_1 et n_2 respectivement de telle sorte que l'opérateur A' agit comme une multiplication à droite par la matrice A.

297. a) Montrer que l'espace $C[0, 1]$ ne peut être plongé isométriquement dans $l_p(\mathbf{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

b) Construire une injection isométrique de $C[0, 1]$ dans $l_\infty(\mathbf{R})$.

298.** a) Montrer qu'un espace de Banach L est réflexif si et seulement si sa boule unité est faiblement compacte.

b) Soient L un espace de Banach réflexif, L_0 un sous-espace fermé de L. Montrer que L_0 et $L_1 = L/L_0$ sont réflexifs.

299*. Montrer qu'il n'existe aucun espace normé dont $C[a, b]$ soit le dual.

3. Théorème de Hahn-Banach.

300. Montrer que si un e.v.t. L_1 est séparé et de dimension finie, toute application linéaire $L_1 \to L_2$, où L_2 est un e.v.t. quelconque, est continue.

301. Soient P l'espace de tous les polynômes de x à coefficients réels, U_+ (resp. U_-) le sous-espace des polynômes de coefficients supérieurs positifs (resp. négatifs). Montrer que U_+ et U_- sont convexes mais ne sont séparés par aucun hyperplan.

302. Montrer que des ensembles A et B fermés convexes disjoints dont l'un est un compact *sont strictement séparés par un hyperplan.* (En d'autres termes il existe une fonctionnelle linéaire continue f et des constantes $c_1 < c_2$ telles que $f(x) \leqslant c_1$ sur A et $f(x) \geqslant c_2$ sur B.)

303°. Soient L un espace vectoriel normé par p, L' l'espace dual de norme p', L'' l'espace dual à L' de norme p''. A tout $x \in L$ associons un élément $F_x \in L''$ à l'aide de la formule $F_x(f) = f(x)$ pour $f \in L'$. Montrer que $p''(F_x) = p(x)$.

304°. Soit L un espace normé de dimension finie. Montrer que L et L'' sont isomorphes (c'est-à-dire qu'il existe une application isométrique linéaire de L sur L'').

305. Montrer que tout espace vectoriel normé est isométrique à un sous-espace d'un espace de la forme $C(X)$, où $C(X)$ est l'espace des fonctions continues sur un compact X de norme $\|f\| = \max\limits_{x \in X} |f(x)|$.

306*. Montrer le théorème de Riesz suivant. Pour qu'il existe sur un espace réel normé L une fonctionnelle linéaire f de norme $\leqslant 1$ prenant les valeurs $c_1, \ldots, c_n$ sur les éléments $x_1, \ldots, x_n$ respectivement, il est nécessaire et suffisant que $\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n \leqslant \|\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\|$ pour tous nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

307. Construire une injection isométrique de $l_p(2, \mathbf{R})$ dans l'espace $C[0, 1]$ pour $p = 1, 2, \infty$.

308. Montrer qu'il existe une injection isométrique de $l_p(n, \mathbf{R})$ dans $l_\infty(\mathbf{R})$.

309. Soit $l_\infty(\mathbf{R})$ l'espace des suites réelles bornées $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Montrer qu'il existe une fonctionnelle linéaire $\mathrm{LIM} \in l_\infty(\mathbf{R})'$ possédant les propriétés suivantes :

1) $\sup x_n \geqslant \mathrm{LIM}\,\{x_n\} \geqslant \inf x_n$;

2) si existe $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, alors $\mathrm{LIM}\,\{x_n\} = a$;

3) $\mathrm{LIM}\,\{x_{n+1}\} = \mathrm{LIM}\,\{x_n\}$.

310. Montrer que les propositions de l'exercice 309 se généralisent au cas de suites bilatérales $\{x_n\}$, $n \in \mathbf{Z}$.

311. Soient L un espace normé, T un opérateur linéaire inversible dans L tel que

$$p(T^n x) \leqslant cp(x), \qquad \forall x \in L, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Montrer qu'il existe une norme $\tilde{p}$ dans L équivalente à p pour laquelle l'opérateur T est isométrique.

312. Soit L un espace localement convexe. Montrer qu'il existe une injection continue de L dans un produit de droites $\mathbf{R}^\alpha$, où α est une puissance assez élevée. (En d'autres termes, tout espace localement convexe peut être décrit par des coordonnées.)

313*. Soit $B(\mathbf{R}^n)$ un ensemble de fonctions réelles bornées sur $\mathbf{R}^n$ de norme $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)|$. Montrer qu'il existe une fonctionnelle linéaire $\mathrm{LIM} \in B(\mathbf{R}^n)'$, possédant les propriétés suivantes :

a) $\inf\limits_{\mathbf{R}^n} f(x) \leqslant \mathrm{LIM}\, f(x) \leqslant \sup\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)$;

b) si existe $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = a$, alors $\mathrm{LIM}\, f(x) = a$;

c) $\mathrm{LIM}\, f(x+y) = \mathrm{LIM}\, f(x)$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$.

314. Montrer que dans l'espace $\mathbf{R}^n$, il existe une mesure finiment-additive définie pour toutes les parties bornées de $\mathbf{R}^n$, invariante par les translations et confondue avec le volume ordinaire sur l'ensemble des parallélépipèdes.

315°. Montrer que dans un espace localement convexe L, une variété linéaire X est dense si et seulement si toute fonctionnelle linéaire $f \in L'$ nulle sur X est identiquement nulle.

316. Montrer que dans un espace localement convexe L, tout ensemble convexe fermé est l'intersection d'une famille de semi-espaces de la forme $f(x) \leqslant c$, où $f \in L'$, $c \in \mathbf{R}$.

317. Représenter la boule unité de $L_p(n, \mathbf{R})$ par l'intersection d'un nombre dénombrable de semi-espaces.

318*. Soit I^N un cube *N-dimensionnel* défini sur $\mathbf{R}^N$ par les équations $|x_i| \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Montrer que tout ensemble convexe borné sur le plan peut être approché avec n'importe quelle précision par une section à deux dimensions de I^N. (De façon plus précise, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble convexe $V \subset \mathbf{R}^2$ il existe un N et une injection φ : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^N$ tels

que les fonctionnelles de Minkowski des ensembles U et $V = \varphi^{-1}(I^N)$ soient reliées par les inégalités $1-\varepsilon < \frac{p_U}{p_V} < 1+\varepsilon$.)

319. Construire l'injection isométrique de $l_p(n, \mathbf{R})$ dans $C[0, 1]$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

320. *Théorème de Helly.* Montrer que si une famille d'ensembles convexes de $\mathbf{R}^n$ est telle que $n+1$ de ses ensembles ont un point commun alors tous ses ensembles ont un point commun.

321. Définissons une topologie sur l'espace $C[0, 1]$ en prenant pour base des voisinages de 0 les ensembles $U_\varepsilon = \left\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 \sqrt{|f(x)|}\, dx < \varepsilon\right\}$. Montrer que toute fonctionnelle linéaire continue est nulle sur l'espace topologique obtenu.

322*. Soient L un espace localement convexe, X un ensemble de mesure μ, f une fonction sur X à valeurs dans L. On dit que f est *faiblement mesurable* si la fonction numérique $F(f(x))$ est μ-mesurable pour tous les $F \in L'$. Un élément $\varphi \in L$ est dit *intégrale faible* de f par rapport à la mesure μ sur l'ensemble X si $F(f) = \int_X F(f(x))\, d\mu(x)$ pour tous les $F \in L'$. Montrer :

a) l'unicité de l'intégrale faible ;

b) l'existence de l'intégrale faible dans le cas où L est un espace de Banach réflexif et la fonction $||f||$ sommable par rapport à la mesure μ sur X.

4. Espaces de Banach.

323°. Montrer que $||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ n'est pas une norme pour $p < 1$ et $n \geqslant 2$.

324. Montrer que $l_p(K)$ est un espace de Banach séparable pour $1 \leqslant p < \infty$ et $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

325. Montrer que l'espace $l_\infty(K)$ de toutes les suites bornées $\{x_n\}$, $x_n \in K$, muni de la norme $||\{x_n\}|| = \sup_n |x_n|$ est un espace de Banach non séparable.

326. Montrer qu'un espace normé L est de Banach si et seulement si toute série $\sum x_i$ telle que $\sum ||x_i|| < \infty$ converge dans L.

327°. Soit L_0 un sous-espace fermé d'un espace de Banach L. Montrer que la formule $||x||_1 = \inf_{y-x \in L_0} ||y||$ définit une norme sur l'espace $L_1 = L/L_0$.

328. Montrer que l'espace L_1 défini dans l'exercice 327 est de Banach.

329*. Soient L un espace normé, L_0 un sous-espace fermé de L, $L_1 = L/L_0$ la norme dans L_1 étant définie comme dans l'exercice 327. Si L_0 et L_1 sont des espaces de Banach, en sera-t-il de même de l'espace L ?

330*. Montrer que tout espace de Banach séparable sur un corps K est un espace quotient de $l_1(K)$ par l, où $l \subset l_1(K)$.

331°. Montrer qu'un espace normé L est non séparable si et seulement

s'il renferme un ensemble non dénombrable de boules deux à deux disjointes de rayon 1.

332. Soient L un espace normé, L_1 un sous-espace de L de dimension finie. Montrer que pour tout point $x \in L$ il existe un point $y \in L_1$ tel que la distance de x à y est égale à celle de x à L_1.

333*. Calculer la distance d'un point $x^n \in C[-1, 1]$ au sous-espace $P_{n-1} \subset C[-1, 1]$ des polynômes de degré $< n$.

334. Soient L un espace de Banach, L_0 une partie fermée de L. On dit qu'un vecteur $x \in L$ est une *ε-perpendiculaire* à L_0 si pour tout $y \in L_0$ on a $\|x+y\| \geqslant (1-\varepsilon)\|x\|$. Montrer que tout sous-espace propre L_0 possède une ε-perpendiculaire quel que soit $\varepsilon > 0$.

335. Déduire à partir de l'exercice 334 la non-compacité de la boule unité d'un espace de Banach de dimension infinie.

336. Montrer que l'existence d'une 0-perpendiculaire à un sous-espace L_0 défini par l'équation $f(x) = 0$, $f \in L'$, équivaut à l'existence de $\max\limits_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$.

337. On dit qu'un sous-espace L_0 d'un espace de Banach de L est *complémentable* s'il existe un sous-espace fermé $L_1 \subset L$ tel que $L = L_0 \oplus L_1$ (la somme algébrique directe). Montrer que

a) tout sous-espace de dimension finie est complémentable ;

b) tout sous-espace de codimension finie est complémentable ;

c) l'espace $l_\infty(K)$ est complémentable dans tout espace de Banach le contenant ;

d) si L/L_0 est isométrique à $l_1(K)$, alors L_0 est complémentable.

338*. Montrer que l'espace $l_{p_1}(n, \mathbf{R})$ est linéairement isométrique à l'espace $l_{p_2}(n, \mathbf{R})$ si seulement $p_1 = p_2$.

339. a) Montrer que la norme $p_1 \hat{\otimes} p_2$ peut être définie par la formule $p_1 \hat{\otimes} p_2(x) = \inf \sum\limits_{k=1}^{N} p_1(y_k) p_2(z_k)$, où la borne inférieure est prise sur tous les représentants x de la forme $\sum\limits_{k=1}^{N} y_k \otimes z_k$ $x_k \in L_1$, $y_k \in L_2$.

b) Montrer que la norme $p_1 \check{\otimes} p_2$ est définie par la formule $p_1 \check{\otimes} p_2(x) = \sup f_1 \otimes f_2(x)$, où la borne supérieure est prise sur tous les $f_1 \in L_1'$, $f_2 \in L_2'$ avec la condition $p_1'(f_1) \leqslant 1$, $p_2'(f_2) \leqslant 1$.

340. a) Soient L_1 et L_2 des espaces vectoriels sur un corps K. Considérons la catégorie $\mathcal{K}$ dont les objets sont les applications bilinéaires $A: L_1 \times L_2 \to L$, où L est un espace vectoriel sur K (cet espace n'est pas le même pour chaque objet). On appellera morphisme d'un objet $A: L_1 \times L_2 \to L$ dans un objet $B: L_1 \times L_2 \to M$ une application linéaire $\varphi: L \to M$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "\varphi"] \\ L_1 \times L_2 \arrow[ur, "A"] \arrow[r, "B"'] & M \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Montrer que $A_0 : L_1 \times L_2 \to L_1 \otimes L_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2$ est un objet universel dans K.

b) Soient L_1 et L_2 des espaces de Banach, $\mathcal{K}$ la catégorie des applications bilinéaires $A : L_1 \times L_2 \mapsto L$ de norme $\leqslant 1$. Les morphismes sont définis comme dans l'exercice 339 avec la condition subsidiaire $||\varphi|| \leqslant 1$. Montrer que l'application $A_0 : L_1 \times L_2 \to L_1 \hat{\otimes} L_2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 \otimes x_2)$ est un objet universel dans la catégorie $\mathcal{K}$.

341*. Soient $L_1 = l_2(n, \mathbf{R})$, $L_2 = l_2(m, \mathbf{R})$. Identifions l'espace $L_1 \otimes L_2$ à l'espace des matrices d'ordre $n \times m$ de la manière suivante. On écrira les éléments de L_2 sous la forme de vecteurs lignes et ceux de L_1 sous la forme de vecteurs colonnes. A l'élément $x \otimes y$ est alors associée la matrice $x \cdot y$. Supposons qu'à un élément $a \in L_1 \otimes L_2$ est associée la matrice A. Montrer que la norme de l'élément a dans l'espace $L_1 \hat{\otimes} L_2$ peut être calculée par la formule $||a|| = s_1^{1/2} + \ldots + s_k^{1/2}$, $k = \min(n, m)$, où s_i sont les valeurs propres de la matrice AA' (resp. $A'A$) rangées par ordre de décroissance si $k = n$ (resp. $k = m$).

342. Montrer que dans les hypothèses de l'exercice 341, la norme de l'élément $a \in L_1 \underset{\vee}{\otimes} L_2$ est confondue avec celle de la matrice A comme opérateur de $l_2(m, \mathbf{R})$ dans $l_2(n, \mathbf{R})$ et est égale à $s_1^{1/2}$.

343. Soient L_1 et L_2 des espaces de Banach. Montrer qu'il existe une injection isométrique naturelle de $L_1' \otimes L_2'$ dans l'espace $\mathcal{L}(L_1, L_2)$.

344. Montrer que $l_1(n, \mathbf{R}) \hat{\otimes} l_1(m, \mathbf{R})$ est isomorphe à $l_1(mn, \mathbf{R})$.

345. Montrer que $l_\infty(n, \mathbf{R}) \underset{\vee}{\otimes} l_\infty(m, \mathbf{R})$ est isomorphe à $l_\infty(mn, \mathbf{R})$.

§ 2. Opérateurs linéaires

1. Espace des opérateurs linéaires.

346°. Supposons que dans l'espace $l_2(\mathbf{R})$ un opérateur P_k est défini par la formule $P_k(\{x_n\}) = \{\varepsilon_{nk} x_n\}$, où $\varepsilon_{nk} = 1$ pour $k \leqslant n$ et $\varepsilon_{nk} = 0$ pour $k > n$. Lesquelles des convergences suivantes ont-elles lieu pour $k \to \infty$: a) $P_k \Rightarrow 0$, b) $P_k \to 0$, c) $P_k \rightharpoonup 0$?

347°. Soit $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ la base canonique de l'espace $l_2(\mathbf{R})$. Définissons un opérateur A_n par la formule

$$A_n e_k = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad k = n, \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n. \end{cases}$$

Montrer que $||A_n|| = 1$ et que $A_n \to 0$ pour $n \to \infty$.

348°. Dans les hypothèses de l'exercice 347 définissons un opérateur B_n par la formule

$$B_n e_k = \begin{cases} e_n & \text{si} \quad k = 1, \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 1. \end{cases}$$

Montrer que $||B_n|| = 1$, $B_n \rightharpoonup 0$ pour $n \to \infty$ mais que $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} B_n$ n'existe pas.

349°. Montrer que la multiplication d'opérateurs est continue pour la topologie uniforme : si $A_n \Rightarrow A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$, $B_n \Rightarrow B \in \mathcal{L}(L_0, L_1)$, alors $A_nB_n \Rightarrow AB \in \mathcal{L}(L_0, L_2)$.

350°. Soient L_1 et L_2 des espaces de Banach. Montrer que si $A_n \rightharpoonup A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$, alors les normes des opérateurs A_n sont bornées dans leur ensemble.

351. Montrer que si $A_n \to A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$, $B_n \to B \in \mathcal{L}(L_0, L_1)$ alors $A_nB_n \to AB \in \mathcal{L}(L_0, L_2)$.

352*. Montrer que la multiplication d'opérateurs

a) n'est pas continue pour la topologie forte de l'espace End L si L est de dimension infinie (une comparaison avec le résultat de l'exercice 351 montre que la topologie forte dans End L n'est pas définie par une suite convergente);

b) est continue pour la topologie forte sur la boule unité de l'espace End L.

353. Citer un exemple de suites d'opérateurs $A_n \rightharpoonup 0$, $B_n \rightharpoonup 0$ telles que A_nB_n ne converge pas faiblement vers 0.

354. Supposons qu'un espace de Banach L se décompose en une somme algébrique directe $L = L_1 + L_2$. Montrer que tout projecteur sur L_1 parallèlement à L_2 est borné si et seulement si L_1 et L_2 sont fermés dans L.

355. Montrer qu'un opérateur P dans un espace de Banach L est un projecteur sur un sous-espace fermé L_1 parallèlement à un sous-espace fermé L_2 si et seulement s'il est borné et vérifie la relation $P^2 = P$.

356°. Montrer la relation $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$ pour $A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$, $B \in \mathcal{L}(L_0, L_1)$.

357. Montrer que $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ est un espace de Banach.

358°. Soit A un opérateur de multiplication par une fonction mesurable bornée $a(x)$ sur l'espace $L_p(X, \mu)$. Montrer que A est borné et calculer sa norme.

359°. Calculer la norme de l'opérateur identité de $L_p[a, b]$ dans $L_q[a, b]$ pour $p \geqslant q$.

360*. Pour quelles fonctions $a(x)$ l'opérateur de multiplication par $a(x)$ est-il un opérateur continu de $L_p[0, 1]$ dans $L_q[0, 1]$?

361. Soit $T(t)$ un opérateur de translation dans $L_p(\mathbf{R})$, $1 \leqslant p < \infty$: $T(t) f(x) = f(x+t)$.

Montrer que $T(t) \to T(t_0)$ pour $t \to t_0$. Est-il vrai que $T(t) \Rightarrow T(t_0)$ pour $t \to t_0$?

362*. Soit $A(t)$ une fonction opératorielle différentiable sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans End L et supposons que $\dim L < \infty$.

Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $A'(t) = CA(t)$, où $C \in$ End L sont de la forme $A(t) = e^{tC}A_0$, où $A_0 \in$ End L et

$$e^{tC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k C^k}{k!}.$$

363.** Soit $A(t)$ une fonction opératorielle continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans End L, $\dim L < \infty$. Montrer que toutes les solutions de l'équation fonctionnelle $A(t)\,A(s) = A(t+s)$ sont de la forme $A(t) = e^{tC}$, où $C \in$ End L.

364*. Montrer que la proposition de l'exercice 363 est mise en défaut si $\dim L = \infty$.

365. Soit A un opérateur linéaire de L_1 dans L_2 envoyant toute suite fortement convergente dans une suite faiblement convergente. Montrer que A est borné.

366*. Soit A un opérateur de L_1 dans L_2, continu pour les topologies faibles de L_1 et L_2. L'opérateur A sera-t-il continu pour les topologies fortes ?

367. Soient $K(x, y)$ une fonction continue sur le carré unité de $\mathbf{R}^2$, A un opérateur de $L_p[0, 1]$ dans $L_q[0, 1]$, $1 \leqslant p, q < \infty$, défini par la formule $(Af)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy$. Trouver l'opérateur adjoint $A' : L_{q'}[0, 1] \to L_{p'}[0, 1]$, où $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$.

368. Soit P: $C[0, 2] \to C[0, 1]$ un opérateur de restriction. Trouver l'opérateur adjoint $P' : V[0, 1] \to V[0, 2]$.

2. Ensembles compacts et opérateurs compacts.

369. Montrer que les propriétés suivantes d'un ensemble A d'un espace topologique X sont équivalentes :

a) A est compact ;

b) tout ensemble infini A contient une suite généralisée convergeant vers un élément de A ;

c) toute famille centrée de parties fermées de A possède une intersection non vide. (Une famille d'ensembles est dite *centrée* si toute sous-famille finie possède une intersection non vide.)

370. Calculer la dimension approchée de *l'ensemble triadique de Cantor X.* (L'ensemble X est l'intersection d'un nombre dénombrable d'ensembles X_n, où X_n est l'intervalle obtenu à partir de $[0, 1]$ par élimination de 3^{n-1} intervalles de la forme $\left(\frac{3k-2}{3^n}, \frac{3k-1}{3^n}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, 3^{n-1}$.)

371°. Soit K un ensemble convexe dans un espace vectoriel L. On dit qu'un sous-ensemble $A \subset K$ est *extrémal* si tout intervalle fermé de K et de milieu dans A est entièrement contenu dans A. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-ensembles extrémaux soit est vide soit est un sous-ensemble extrémal.

372. Soit K un compact convexe. Montrer que l'ensemble de ses parties extrémales fermées (voir exercice 371) ordonné par l'inclusion admet un plus petit élément.

373. Soit K un ensemble borné convexe fermé dans un espace localement convexe L, A le plus petit élément de la famille des parties extrémales fermées de K (voir exercice 372). Montrer que A est constitué d'un seul point.

374. Montrer qu'un compact convexe K d'un espace localement convexe L admet au moins un point extrémal.

375*. Démontrer le *théorème de Krein-Milman*, savoir que tout compact convexe K d'un espace localement convexe L est confondu avec l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

376°. Trouver les points extrémaux de la boule unité dans l'espace $l_p(n, \mathbf{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

377°. Trouver les points extrémaux de la boule unité dans les espaces c et c_0 (voir exercice 293).

378. Montrer que les espaces c et c_0 (voir exercice 293) ne sont duals d'aucun espace vectoriel normé.

379. Démontrer l'analogue suivant du théorème d'Ascoli-Arzela : soit $B(T, X)$ l'espace métrique des fonctions bornées sur un ensemble T à valeurs dans un espace métrique compact X ; la distance sur $B(T, X)$ est définie comme $d(f, g) = \sup_{t \in T} d_X(f(t), g(t))$, où d_X est la distance sur X. Pour qu'un ensemble $M \subset B(T, X)$ soit précompact il est nécessaire et suffisant que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition finie de l'ensemble T: $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ telle que toute fonction $f \in M$ varie d'une quantité $\leqslant \varepsilon$ sur toute partie T_j.

380. Trouver les points extrémaux de l'ensemble S des matrices bistochastiques d'ordre n. (Une matrice est *bistochastique* si ses éléments sont positifs et si la somme des éléments de chaque colonne et celle des éléments de chaque ligne sont égales à 1.)

381°. Montrer que dans un espace normé de dimension infinie l'opérateur identité n'est pas compact.

382°. Montrer que dans un espace normé de dimension infinie l'inverse d'un opérateur compact n'est pas borné.

383. Soit donné dans $l_p(\mathbf{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, un opérateur A par la formule $A\{x_n\} = \{a_n x_n\}$, où $\{a_n\}$ est une suite bornée de réels. Montrer que l'opérateur A est compact si et seulement si $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

384. Montrer que l'opérateur A défini par $Af(x) = x \cdot f(x)$ n'est pas compact dans l'espace $C[0, 1]$.

385. L_1 et L_2 étant des espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$, montrer que la compacité de A' entraîne celle de A.

386°. Soit $K(x, y)$ une fonction continue sur le carré unité de $\mathbf{R}^2$. Montrer que l'opérateur A de $C[0, 1]$ défini par la formule $Af(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy$ est compact.

387. Soit $K \in L_2(X \times Y, \mu \times \nu)$. Montrer que l'opérateur A de $L_2(Y, \nu)$ dans $L_2(X, \mu)$ défini par $Af(x) = \int_Y K(x, y) f(y)\, d\nu(y)$ est compact.

388*. Supposons qu'un opérateur T de $L_p]0, \infty[$, $p > 1$, est défini par la formule $Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$.

Montrer que T est borné mais n'est pas compact. Trouver la norme de T.

389. Soit L un espace réflexif. Montrer que l'opérateur $T \in \operatorname{End} L$ qui envoie une suite faiblement convergente dans une suite fortement convergente est compact.

390. Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'opérateur d'immersion de $C^{k+1}(\bar{\Omega})$ dans $C^k(\bar{\Omega})$ est compact.

391. Un opérateur compact A peut-il être solution de l'équation algébrique $\sum_{k=0}^{n} c_k A^k = 0$ (on convient que $A^0 = 1$) ?

3. Théorie des opérateurs de Fredholm.

392. Soit A un opérateur de $l_p(\mathbf{R})$ défini par la formule $A\{x_n\} = \{a_n x_n\}$, où $\{a_n\}$ est une suite fixée de réels. Quelle condition doit remplir $\{a_n\}$ pour que le sous-espace im A soit fermé dans $l_p(\mathbf{R})$?

393°. Soit T un opérateur de $l_p(\mathbf{R})$ défini par la formule $T\{x_n\} = \{x_{n+1}\}$. Trouver le noyau et le conoyau des opérateurs T^k, $k = 1, 2, \ldots$

394*. Soient P un polyèdre dans $\mathbf{R}^3$, X_k l'ensemble de ses faces orientées k-dimensionnelles (les sommets, les arêtes, les faces et le polyèdre lui-même sont des arêtes respectivement 0-dimensionnelles, 1-dimensionnelles, 2-dimensionnelles et 3-dimensionnelle), L_k l'espace des fonctions réelles sur X_k. Si $\Gamma \in X_{k-1}$, $\Delta \in X_k$ définissons le nombre $\varepsilon(\Gamma, \Delta)$ en le posant égal à 0 si Γ n'appartient pas à la frontière de Δ et à ± 1 dans le cas contraire. Le signe de $\varepsilon(\Gamma, \Delta)$ dépend de l'orientation de Γ et de Δ. Soient $e_1, \ldots, e_{k-1}$ une base définissant l'orientation de Γ ; $f_1, \ldots, f_k$ une base définissant l'orientation de Δ et telle que les vecteurs $f_1, \ldots, f_{k-1}$ soient situés dans le plan Γ et le vecteur f_k soit transversal à Γ et orienté vers l'extérieur de Δ. Alors $\varepsilon(\Gamma, \Delta)$ est égal au signe du déterminant de la matrice de passage de $e_1, \ldots, e_{k-1}$ à $f_1, \ldots, f_{k-1}$. Définissons l'opérateur d_k : $L_{k-1} \to L_k$ par la formule

$$d_k f(\Delta) = \sum_{\Gamma \in X_{k-1}} \varepsilon(\Gamma, \Delta) f(\Gamma).$$

Montrer que la suite

$$0 \to L_0 \xrightarrow{d_1} L_1 \xrightarrow{d_2} L_2 \xrightarrow{d_3} L_3 \to 0$$

est semi-exacte et calculer ses cohomologies pour les polyèdres élémentaires (simplexe, cube, cube avec un trou, cube avec une nappe).

395. Soit $C^k(T)$ l'espace des fonctions définies sur un cercle T admettant k dérivées continues et de norme

$$\|f\| = \max_{t \in T} \{|f(t)|, |f'(t)|, \ldots, |f^{(k)}(t)|\}.$$

Montrer que la suite

$$0 \to C^k(T) \xrightarrow{d} C^{k-1}(T) \to 0,$$

où d est l'opérateur de différentiation, est semi-exacte et calculer ses cohomologies.

396. Soient

$$0 \to L_0 \xrightarrow{T_1} L_1 \xrightarrow{T_2} \ldots \to L_{n-1} \xrightarrow{T_n} L_n \to 0$$

une suite semi-exacte d'espaces de dimension finie, H_k l'espace de ses cohomologies pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

Prouver l'*identité d'Euler*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim L_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H_k.$$

397.** Soit donnée une suite

$$\ldots \to L_{k-1} \xrightarrow{T_k} L_k \xrightarrow{T_{k+1}} L_{k+1} \to \ldots$$

d'espaces de Banach et d'opérateurs continus. Montrer que si la suite duale

$$\ldots \leftarrow L'_{k-1} \xleftarrow{T'_k} L'_k \xleftarrow{T'_{k+1}} L'_{k+1} \leftarrow \ldots$$

est exacte, il en est de même de la suite initiale.

398*. Soit donnée une suite semi-exacte

$$\ldots \to L_{k-1} \xrightarrow{T_k} L_k \xrightarrow{T_{k+1}} L_{k+1} \to \ldots$$

d'espaces de Banach et d'applications continues telles que $T_{k+1}(L_k)$ soit fermée dans L_{k+1}. Montrer que la suite duale est semi-exacte et que les espaces de cohomologies de la suite duale sont duals des espaces de cohomologies de la suite initiale.

399°. Construire un opérateur quasi-inversible de l'opérateur T de l'exercice 393.

400°. Soit T un opérateur de différentiation de la forme

$$T = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + a_n(x),$$

de $C^{k+n}[0, 1]$ dans $C^k[0, 1]$. Montrer que T est un opérateur de Fredholm et calculer son indice.

401. L'opérateur de multiplication par une fonction continue $a(x)$ dans l'espace $C[0, 1]$ est-il de Fredholm ?

402*. Soit L l'espace des fonctions harmoniques continues jusqu'à la frontière dans un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ limité par une courbe différentiable Γ. Montrer que l'opérateur de restriction $P\colon L \to C(\Gamma)$ est de Fredholm et calculer son indice.

403. Soient Ω un domaine borné dans le plan complexe, $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω et continues dans $\bar{\Omega}$, $a(z)$ une fonction holomorphe dans un voisinage de $\bar{\Omega}$. Montrer que l'opérateur de multiplication par $a(z)$ est de Fredholm dans $H(\Omega)$ et trouver son indice.

404°. Trouver toutes les solutions de l'équation intégrale $f(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cos(x-y) f(y)\, dy$ dans l'espace $C[0, \pi/2]$.

405°. Pour quel membre second $g \in C[0, \pi]$ l'équation intégrale

$$f(x) - \int_0^{\pi} \sin(x+y) f(y)\, dy = g(x)$$

admet-elle une solution dans l'espace $C[0, \pi]$?

406°. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbf{R}$ l'équation

$$f(x)-\lambda \int_a^b e^{(x-y)} f(y)\, dy = 1$$

admet-elle une solution dans $L_p[a, b]$, $1 \leqslant p < \infty$?

407*. Soient $H_0 = L_2(\mathbf{R}, dx)$, H_1 la complétion de l'espace $S(\mathbf{R})$ (voir chapitre III, § 3, numéro 3) pour la norme $\|f\|_1^2 = \|xf\|_0^2 + \|f'\|_0^2$ ($\| \ \|_0$ représente la norme sur H_0). En théorie quantique du champ les *créateurs et annihilateurs* peuvent être définis comme des opérateurs différentiels de H_1 dans H_0 par les formules $A_\pm f = \left(\frac{d}{dx} \pm x\right) f$. Montrer que les opérateurs $A_\pm$ sont des Fredholm et que ind $A_\pm = \pm 1$.

408. On appelle *opérateur de Hilbert-Schmidt* un opérateur intégral

$$(A\varphi)(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

agissant dans l'espace $L_2[a, b]$ et dont le noyau vérifie la condition $\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt < \infty$. Montrer que

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt}$$

pour un opérateur de Hilbert-Schmidt.

409°. Dans les notations de l'exercice 408, montrer que la correspondance $A \mapsto K(s, t)$ entre les opérateurs de Hilbert-Schmidt et leurs noyaux est biunivoque à l'équivalence près des fonctions mesurables.

410°. Soit donné un opérateur de Hilbert-Schmidt défini par un noyau $K(s, t)$ (voir exercice 408). Montrer que l'opérateur adjoint est défini par le noyau « adjoint » $\overline{K(t, s)}$.

411. On appelle *équation intégrale de Fredholm (de deuxième espèce) de noyau dégénéré* une équation de la forme

$$\varphi(s) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n P_i(s)\, Q_i(t)\right) \varphi(t)\, dt + f(s),$$

où P_i et Q_i sont des fonctions de $L_2[a, b]$. Montrer que la solution générale de cette équation est de la forme $\varphi(s) = \sum_{i=1}^n q_i P_i(s) + f(s)$ et que les coefficients indéterminés q_i peuvent être trouvés à partir d'un système d'équations algébriques de la forme

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_i = q_i.$$

412*. On appelle *équation de Volterra* (de deuxième espèce) une équation intégrale de la forme

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s),$$

où $K(s, t)$ est une fonction mesurable bornée sur le carré $[a, b]\times[a, b]$. Montrer que quel que soit $f \in L_2$, l'équation de Volterra admet une solution et une seule.

413. Montrer que le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt de noyaux $K(s, t)$ et $Q(s, t)$ (voir exercice 408) est un opérateur du même type de noyau

$$R(s, t) = \int_a^b K(s, u)\,Q(u, t)\,du.$$

414. Soit A un opérateur de Hilbert-Schmidt (voir exercice 408) dont le noyau vérifie la relation

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt = K^2 < \infty.$$

Montrer que le noyau $K_n(s, t)$ de l'opérateur A^n vérifie la relation

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(s, t)|^2\,ds\,dt \leqslant K^{2n}.$$

§ 3. Espaces fonctionnels et distributions

1. Espaces des fonctions intégrables.

415°. Montrer que pour toutes fonctions mesurables sur un ensemble X de mesure μ on a l'inégalité de Hölder

$$\left|\int_X f(x)\,g(x)\,d\mu(x)\right| \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{1/q},$$

où les nombres p et q sont reliés par la relation $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

416°. Montrer que pour toute fonction mesurable f sur un ensemble X de mesure μ on a

$$\left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} = \sup\left|\int_X f(x)\,g(x)\,d\mu(x)\right|,$$

où le suprémum est pris sur toutes les fonctions $g(x)$ telles que $\int_X |g(x)|^q\,d\mu(x) \leqslant 1$ et les nombres p et q sont reliés par la relation $1/p+$ $+1/q = 1$.

417. Prouver *l'inégalité intégrale de Minkowski*

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

pour $1 < p < \infty$.

418°. On dit qu'une mesure μ sur un ensemble X possède une *base dénombrable* s'il existe une famille dénombrable $\{A_n\}$ de sous-ensembles mesurables dans X telle que pour tout sous-ensemble mesurable B il existe un ensemble A_n tel que $\mu(A_n \triangle B) < \varepsilon$.

Montrer que l'espace $L_1(X, \mu)$ est séparable si et seulement si μ possède une base dénombrable.

419°. Montrer que l'espace $L_p(X, \mu)$, $1 < p < \infty$, est séparable si et seulement si l'espace $L_1(X, \mu)$ l'est.

420°. Montrer que l'espace $L_\infty(X, \mu)$ est soit de dimension finie soit non séparable.

421°. Soit $\mu(X) < \infty$. Montrer que l'espace $L_p(X, \mu)$ est contenu dans l'espace $L_q(X, \mu)$ pour $p \geqslant q \geqslant 1$.

422°. Montrer que pour $p \neq q$ aucun des espaces $L_p(\mathbf{R}, dx)$ et $L_q(\mathbf{R}, dx)$ n'est contenu dans l'autre.

423°. Soit $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$. Pour quelles valeurs de p la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta}$ appartient-elle à l'espace $L_p(\mathbf{R}_+, dx)$ (par $\mathbf{R}_+$ on désigne l'intervalle $0, \infty[$) ?

424. Supposons que des nombres p, q et r sont reliés par la relation $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$, $f \in L_p(X, \mu)$, $g \in L_q(X, \mu)$, $h \in L_r(X, \mu)$. Montrer que la fonction fgh est sommable et que $\|fgh\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$.

425. Supposons que $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant q \leqslant \infty$. Montrer que $L_p(X, \mu) \cap L_q(X, \mu)$ est contenu dans $L_r(X, \mu)$ et que pour toute fonction $f \in L_p(X, \mu) \cap L_q(X, \mu)$ on a $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^\beta$, où $\alpha = \dfrac{r^{-1} - q^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}}$, $\beta = \dfrac{p^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}}$.

426. Soit $\mu(X) < \infty$. Montrer que $L_\infty(X, \mu) \subset L_p(X, \mu)$ pour tous les $p \geqslant 1$ et que $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p$.

427°. Montrer que les ensembles de fonctions suivants sont denses dans l'espace $L_p[a, b]$, $1 \leqslant p < \infty$:

a) l'ensemble $S[a, b]$ de toutes les fonctions constantes par morceaux ;

b) l'ensemble $C[a, b]$ de toutes les fonctions continues ;

c) l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes ;

d) l'ensemble $\mathcal{P}_0$ des polynômes s'annulant aux extrémités d'un intervalle fermé.

428°. Trouver la norme de la fonction $f(x) = x^\alpha$ dans les espaces $L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, auxquels cette fonction appartient.

429. Construire dans $L_1(\mathbf{R}, dx)$:

a) le sous-espace fermé de dimension infinie des fonctions continues ;

b) un sous-espace fermé de dimension infinie ne contenant aucune fonction continue non nulle.

430. Soient $\mu(X) < \infty$, $V \subset L_1(X, \mu)$ un sous-espace fermé de dimension infinie. Montrer que V ne peut être contenu dans $L_\infty(X, \mu)$.

431°. Montrer que l'ensemble $C_0(\mathbf{R})$ des fonctions à support borné continues est dense dans $L_p(\mathbf{R}, dx)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

432. Montrer que toute fonction $f \in L_p(\mathbf{R}, dx)$ est *continue en moyenne*, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour $|t| < \delta$ l'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)-f(x)|^p \, dx < \varepsilon.$$

433. Prouver la proposition de l'exercice 432 pour l'espace $L_p(\mathbf{R}^n, dx)$.

434*. Soit $M \subset L_p(\mathbf{R}^n, dx)$, $1 \leqslant p < \infty$. Montrer que pour que M soit précompact il est nécessaire et suffisant que :

a) il existe une constante c telle que $\|f\|_p \leqslant c$ pour tous les $f \in M$;

b) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $R(\varepsilon)$ tel que

$$\int_{|x| > R(\varepsilon)} |f(x)|^p \, dx < \varepsilon, \quad f \in M ;$$

c) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x+t)-f(x)|^p \, dx < \varepsilon,$$

pour $|t| < \delta(\varepsilon)$.

435*. Prouver l'isomorphisme des espaces

$$L_1(X, \mu) \hat{\otimes} L_1(Y, \nu) \approx L_1(X \times Y, \mu \times \nu).$$

436. Trouver les points extrêmes de la boule unité de $L_p(X, \mu)$:

a) pour $p = 1$;

b) pour $1 < p < \infty$;

c) pour $p = \infty$.

437*. Montrer que les espaces $L_1[0, 1]$ et l_1 ne sont pas isomorphes.

2. Espaces des fonctions continues.

438°. Montrer que l'espace $C(X)$ est de Banach pour tout compact X.

439°. Prouver la séparabilité de l'espace $C(X)$, où X est un compact de $\mathbf{R}^n$.

440. On dira qu'une fonctionnelle linéaire F sur $C(X)$ est *positive* si $F(x) \geqslant 0$ pour toutes les fonctions $f \in C(X)$ positives. Montrer que toute fonctionnelle linéaire positive F est continue et que sa norme est égale à $F(1)$, où 1 est la fonction identiquement égale à 1 sur X.

441. Montrer que toute fonctionnelle $F \in C'(X)$ peut être mise sous la forme $F = F_1 - F_2$, où F_1 et F_2 sont des fonctionnelles positives (voir exercice 440).

442*. Soient X un compact métrique, $F \in C'(X)$ une fonctionnelle positive (voir exercice 440). Pour tout compact $K \subset X$ posons $\mu(K) =$

$= \inf\limits_{\chi_K \leq \varphi \leq 1} F(\varphi)$ et pour borélien $E \subset X$, $\mu(E) = \sup\limits_{K \subset E} \mu(K)$. Montrer que μ est une mesure σ-additive.

443°. Calculer les normes des fonctionnelles suivantes sur $C[-1, 1]$:

a) $F(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$;

b) $F(f) = \int\limits_{-1}^1 \operatorname{sgn} x f(x)\,dx$;

c) $F(f) = \int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx - f(0)$;

d) $F_\varepsilon(f) = \dfrac{f(\varepsilon)+f(-\varepsilon)-2f(0)}{\varepsilon^2}$;

e) $F(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

f) $F_n(f) = \int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx - \dfrac{1}{2n+1} \sum\limits_{k=-n}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

444°. Représenter les fonctionnelles suivantes sur $C[-1, 1]$ sous forme d'une intégrale de Stieltjes et calculer leurs normes :

a) $F(f) = f(0)$;

b) $F(f) = \int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx - 2f(0)$;

c) $F(f) = \int\limits_0^1 x f(x)\,dx$;

d) $F(f) = \int\limits_{-1}^0 f(x)\,dx - 2\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

445. *Premier théorème de Helly.* Montrer que la suite de fonctionnelles $F_n(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dg_n(x)$, où $g_n \in V[0, 1]$ converge $*$-faiblement vers la fonctionnelle $F(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dg(x)$, où $g \in V[0, 1]$ si et seulement si $g_n(x) \to g(x)$ en tout point de $[0, 1]$ et si les variations des fonctions g_n sont bornées dans leur ensemble.

446*. *Deuxième théorème de Helly.* Soit $M \subset V[0, 1]$.

Montrer que si toutes les fonctions de M possèdent une variation bornée dans l'ensemble, alors M contient une suite partielle $\{g_n(x)\}$ convergeant en chaque point de $[0, 1]$.

447. Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace des polynômes de $C[0, 1]$. Quelles sont les fonctionnelles linéaires suivantes sur $\mathcal{P}$ qui admettent un prolongement continu à $C[0, 1]$ $\left(\text{par } p \text{ on désigne le polynôme } \sum_{k=0}^{\deg p} a_k x^k\right)$:

a) $F_1(p) = a_0$,

b) $F_2(p) = \sum_{k=0}^{\deg p} a_k$,

c) $F_3(p) = \sum_{k=0}^{\deg p} (-1)^k a_k$,

d) $F_4(p) = \sum_{k=0}^{N} c_k a_k$, où $\{c_k\}$ est un vecteur fixe de $\mathbf{R}^n$?

448°. Soit X un compact connexe. Montrer que la boule unité de l'espace $C(X)$ possède en tout deux points extrêmes.

449*. Montrer que les charges ponctuelles $\pm\mu_x$, $x \in X$, définies par la formule $\langle \mu_x, f\rangle = f(x)$ sont des points extrêmes dans la boule unité de l'espace $C'(X)$.

450.** *Théorème de Stone-Weierstrass.* Soient X un compact métrique, $A \subset C(X)$ une sous-algèbre fermée dans $C(X)$ séparant les points (c'est-à-dire quels que soient deux points distincts x_1 et x_2 de X il existe une fonction $\varphi \in A$ telle que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$) et contenant la fonction identiquement égale à 1. Montrer que $A = C(X)$.

451*. La proposition de l'exercice 450 est-elle vraie pour les algèbres ne contenant pas l'unité ?

452*. Soit X un compact métrique linéairement connexe. Construire une application continue de l'intervalle $[0, 1]$ sur X.

453. Construire une application continue de l'intervalle $[0, 1]$ sur le carré unité.

454. Construire une immersion isométrique de $l_p(2, \mathbf{R})$ dans $C[0, 1]$ à l'aide d'une application continue de $[0, 1]$ sur la sphère unité de l'espace $l_p(2, \mathbf{R})$.

455. Montrer que les espaces $C[0, 1] \underset{\varepsilon}{\otimes} C[0, 1]$ et $C(\square)$, où $\square$ représente le carré unité de $\mathbf{R}^2$, sont isomorphes.

456*. Montrer que les espaces $C(X) \underset{\varepsilon}{\otimes} C(Y)$ et $C(X \times Y)$, où X et Y sont des compacts quelconques de $\mathbf{R}^n$, sont isomorphes.

457. Soit $A : C(X) \to C(Y)$ un isomorphisme des espaces de Banach. Montrer que A est de la forme $(Af)(y) = a(y) f(\varphi(y))$, où a est une fonction continue sur Y prenant les valeurs ± 1 et φ est un homéomorphisme de Y sur X.

458. Montrer que l'espace de toutes les fonctions de la forme $f(x)+g(y)$, où $f, g \in C[0, 1]$ est fermé dans $C(\square)$, où $\square$ est le carré unité de $\mathbf{R}^2$.

459.** Montrer que l'espace $C[0, 1]$ possède une *base topologique dénombrable* $\{f_n(x)\}$, c'est-à-dire un système de fonctions $\{f_n(x)\}$ tel que toute

fonction $f \in C[0, 1]$ se représente de façon unique par une série uniformément convergente $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$.

460*. Montrer que le système de fonctions $\{e^{2\pi i n x}\}$, $n \in \mathbf{Z}$, n'est pas une base topologique (voir exercice 459) dans l'espace $CP[0, 1]$ de toutes les fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant la condition $f(0) = f(1)$.

3. Espaces des fonctions lisses.

461. Soit $\mathcal{D}(\mathbf{N})$ l'espace des suites de support borné (c'est-à-dire des suites dont seuls un nombre fini de termes sont non nuls). Pour toute suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ de nombres positifs, définissons la semi-norme p_α dans $\mathcal{D}(\mathbf{N})$ par l'égalité

$$p_\alpha(\{x_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|.$$

a) Montrer que le système de semi-normes p_α fait de $\mathcal{D}(\mathbf{N})$ un espace localement convexe non métrisable complet.

b) Décrire la convergence dans cet espace.

c) Montrer que pour tout domaine Ω il existe dans $\mathcal{D}(\Omega)$ un sous-espace fermé homéomorphe à $\mathcal{D}(\mathbf{N})$.

462°. Soit A une application linéaire de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans un espace localement convexe L. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

a) A est une application continue ;

b) A est une *application bornée* (c'est-à-dire envoie un domaine borné dans un domaine borné) ;

c) A est *séquentiellement compacte* $\Big($c'est-à-dire que $\varphi_n \to 0$ pour $n \to \infty$ entraîne $\lim_{n \to \infty} A\varphi_n = 0\Big)$;

d) la restriction de A à tout sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est continue.

463°. Montrer que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

464. Soient K un compact dans un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de K. Montrer qu'il existe des fonctions non négatives $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ telles que

1) $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ pour tous les i ;

2) $\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1$ pour $x \in K$.

La collection $\{\varphi_i\}$ est appelée *partition de l'unité* sur K.

465. Montrer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$ pour tout domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

466*. Montrer que tout sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}^n$ est ensemble des zéros d'une fonction $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.

467*. Soit $\{c_n\}$ une suite numérique quelconque. Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = c_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$?

468*. Démontrer le théorème 30 du chapitre III pour tout n en définissant pour $x \in \mathbf{R}^n$ des fonctions ψ_δ et χ_N de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ telles que :

a) $\psi_\delta(x) \geqslant 0$, $\psi_\delta(x) =$ pour $\|x\| > \delta$, $\int_{\mathbf{R}^n} \psi_\delta(x)\,dx = 1$;

b) $\chi_N(x) \geqslant 0$, $\chi_N(x) \equiv 1$ pour $\|x\| \leqslant N$.

469°. Indiquer les fonctions appartenant à l'espace $\mathcal{E}(\mathbf{R})$:

a) $f(x) = x^k$, $k \in \mathbf{N}$;

b) $f(x) = e^x$;

c) $f(x) = |x|$;

d) $f(x) = \sin x/x$;

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \geqslant 0, \\ e^{1/x} & \text{pour} \quad x < 0 ; \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{pour} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$

470°. Indiquer les fonctions appartenant à l'espace $S(\mathbf{R})$:

a) $f(x) = e^x$; c) e^{-x^2} ;

b) $f(x) = 1/(1+x^2)$; d) $x^k e^{-x^2}$, k naturel.

471°. Montrer que la dérivation $\partial/\partial x_i$ et le produit par une variable indépendante x_i sont des opérateurs continus dans les espaces $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $S(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.

472. Montrer que si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\Omega)$, alors $fg \in \mathcal{D}(\Omega)$. L'application bilinéaire

$$(f\,;g) \mapsto fg \quad \text{de} \quad \mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{E}(\Omega) \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega)$$

a) est-elle continue en chaque variable ?

b) est-elle continue en l'ensemble des variables ?

c) est-elle *séquentiellement continue* en l'ensemble des variables (c'est-à-dire que $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et $g_n \to g$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ entraînent-ils que $f_n g_n \to fg$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$) ?

473°. Montrer que la suite $f_n = nx/(n^2+x^2)$ tend vers 0 dans $\mathcal{E}(\mathbf{R})$.

474°. Soit f une fonction bornée indéfiniment différentiable sur la droite. La multiplication par f sera-t-elle un opérateur continu

a) dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, d) de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dans $S(\mathbf{R})$,

b) dans $S(\mathbf{R})$, e) de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R})$,

c) dans $\mathcal{E}(\mathbf{R})$, f) de $S(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R})$?

475*. a) Désignons par $G(\mathbf{R}^2)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ constitué des fonctions g possédant la propriété suivante :

$$g(x+m, y+n) = e^{2\pi i m y} g(x, y), \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Montrer que l'opérateur A défini par la formule

$$Af(x, y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(x+k) e^{-2\pi i k y}$$

est un opérateur de $S(\mathbf{R})$ dans $G(\mathbf{R}^2)$.

b) Construire un isomorphisme entre l'espace $S(\mathbf{R}^n)$ et le sous-espace $G(\mathbf{R}^{2n}) \subset \mathcal{E}(\mathbf{R}^{2n})$ formé des fonctions g telles que

$$g(x+p, y+q) = e^{2\pi i p y} g(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad p, q \in \mathbf{Z}^n.$$

476.** L'espace $\mathcal{D}(\mathbf{T}^n)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur un *tore* n-dimensionnel $\mathbf{T}^n \approx \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ se définit comme l'ensemble des fonctions φ sur $\mathbf{T}^n$ telles que les fonctions $\Phi(t_1, \ldots, t_n) = \varphi(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})$ sur $\mathbf{R}^n$ appartiennent à $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. Prouver les isomorphismes

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}^m)\hat{\otimes}\mathcal{D}(\mathbf{T}^n) \approx \mathcal{D}(\mathbf{T}^m)\underset{\varepsilon}{\otimes}\mathcal{D}(\mathbf{T}^n) \approx \mathcal{D}(\mathbf{T}^{m+n}).$$

477°. a) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Montrer que la suite généralisée $f_t(x) = \frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$ admet pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ une limite dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ pour $t \to 0$.

b) Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ la suite généralisée $f_t(x) = \frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$ admet une limite dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ pour $t \to 0$.

478*. Soit $\{\delta_k\}$ une suite de nombres positifs telle que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$ converge. Définissons une suite de fonctions $\{f_n\}$ sur la droite en posant $f_0(x) = \operatorname{sgn} x$, $f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_{x-\delta_n}^{x} f_{n-1}(x)\, dx$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que la suite f_n converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ possédant les propriétés suivantes :

a) $f(x) = -1$ pour $x < 0$, $f(x) = +1$ pour $x > \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$;

b) $|f^{(n)}(x)| \leqslant 2^n(\delta_1 \ldots \delta_n)^{-1}$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

479*. Soit L un espace dénombrablement normé muni d'un système de semi-normes $\{p_k\}$ et dans lequel tout ensemble borné pour la semi-norme p_{k+1} est précompact pour la semi-norme p_k.

a) Montrer que L possède la propriété de Heine-Borel.

b) En déduire que les espaces $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ et $S(\mathbf{R}^n)$ possèdent aussi cette propriété.

480*. Soient L un espace localement convexe, Ω un domaine de $\mathbf{R}^n$. Par $\mathcal{E}(\Omega, L)$ on désigne l'espace des fonctions vectorielles indéfiniment différentiables définies sur Ω et à valeurs dans L. Si $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un système de semi-normes définissant la topologie de L, alors la topologie de $\mathcal{E}(\Omega, L)$ est définie par le système de semi-normes $p_{Kl\alpha}$, où K est un compact dans Ω, $l = (l_1, \ldots, l_n)$ un multi-indice, $\alpha \in A$:

$$p_{Kl\alpha}(\varphi) = \sup_{x \in K} p_\alpha(\partial^l \varphi(x)).$$

Montrer que $\mathcal{E}(\Omega, L)$ est un espace localement convexe complet, métrisable si L l'est.

481*. Soient Ω_1 un domaine de $\mathbf{R}^n$, Ω_2 un domaine de $\mathbf{R}^m$, $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbf{R}^{m+n}$ leur produit direct. Dans les notations de l'exercice 480 prouver les isomorphismes :

$$\mathcal{E}(\Omega_1, \mathcal{E}(\Omega_2)) \approx \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2) \approx \mathcal{E}(\Omega_2, \mathcal{E}(\Omega_1)).$$

482*. Montrer les isomorphismes :

$$\mathcal{E}(\Omega_1)\hat{\otimes}\mathcal{E}(\Omega_2) \approx \mathcal{E}(\Omega_1\times\Omega_2) \approx \mathcal{E}(\Omega_1)\underset{\varepsilon}{\otimes}\mathcal{E}(\Omega_2).$$

483.** Formuler et prouver les analogues des propositions des exercices 480, 481 et 482 pour les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $S(\mathbf{R}^n)$.

4. Distributions.

484°. Montrer que les fonctionnelles suivantes sur $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ sont des distributions singulières et trouver leurs supports :

a) $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$;

b) $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx$;

c) $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^3}\,dx$;

d) $\left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx$

$\left(\text{par v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\right.$ on désigne la *valeur principale au sens de Cauchy* : $\left.\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\right)\right)$.

485. Dans les hypothèses de l'exercice 484 d) trouver la limite $\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}$ pour $k\to\infty$.

486°. Montrer que l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ des fonctions de base est plongé dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ des distributions.

487°. a) Soient $f\in L_1(\mathbf{R}, dx)$ et $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} f_\varepsilon$ existe dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ et vaut $c\cdot\delta(x)$, où $c = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

b) Prouver les relations

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-x^2/\varepsilon} = \sqrt{\pi}\,\delta(x), \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \pi\,\delta(x).$$

488. Prouver l'existence des limites $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

489. Calculer $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sin\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big/x$ dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

490°. Etablir l'existence de $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\sin(x/\varepsilon)$ dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

491°. Supposons que deux fonctions f et g localement sommables sur un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ définissent la même distribution régulière $\Big($c'est-à-dire que $\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} g(x)\varphi(x)\,dx$ pour tous les $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\Big)$.

Montrer que f et g sont confondues presque partout sur Ω.

492°. Montrer que la fonction de Dirac définie par $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ n'est pas régulière.

493. Les distributions sur un tore n-dimensionnel $\mathbf{T}^n$ se définissent comme des fonctionnelles linéaires continues sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{T}^n)$ (voir exercice 476). Montrer que la série de distributions régulières $\sum e^{2\pi ikt}(t \in \mathbf{R}^n,\ kt = k_1t_1 + \ldots + k_nt_n$; la sommation étant étendue à tous les $k \in \mathbf{Z}^n)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^n)$ vers la distribution $\delta(t)$ définie par $\int\limits_{\mathbf{T}^n} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$.

494°. Montrer que toute distribution sur le tore $\mathbf{T}^n$ (voir exercice 493) possède un ordre fini (c'est-à-dire se prolonge en une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace $C^k(\mathbf{T}^n)$ des fonctions k-différentiables sur $\mathbf{T}^n$ pour un certain k).

495. Montrer que la distribution F définie sur la droite par $\langle F, \varphi\rangle = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$ ne possède pas un ordre fini.

496°. Quel est l'ordre de la fonction de Dirac ?

497. De quel ordre est la distribution $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ (voir exercice 484) :

a) sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$,

b) sur l'intervalle $]1, 2[$?

498. Prouver l'*identité de Sokhotski* $\dfrac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P}\dfrac{1}{x} \mp \pi i\,\delta(x)$.

499. Montrer que les fonctions $\dfrac{1}{x \pm i0}$ sont d'ordre 1 sur tout domaine borné de la droite contenant 0.

500. a) Soient L un espace localement convexe, L' le dual de L muni de la topologie $*$-faible. Montrer que toute fonctionnelle linéaire continue $F \in (L')'$ est de la forme $F(f) = f(\varphi)$, où $\varphi \in L$.

b) Montrer que les distributions régulières sont denses pour la topologie $*$-faible dans les espaces $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $S'(\mathbf{R}^n)$.

501°. Trouver le support et l'ordre des distributions

a) $\varphi \mapsto \int\limits_{-1}^{1} |x|\,\varphi'(x)\,dx$,

b) $\varphi \mapsto \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\varphi'(x)\,dx$.

502*. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

a) Montrer que la fonction

$$f_\varphi(\lambda) = \Gamma(\lambda)^{-1} \int_0^\infty x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx$$

définie pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$ admet un prolongement analytique au demi-plan de gauche.

b) Montrer qu'à $\lambda \in \mathbf{C}$ fixe la correspondance $\varphi \mapsto f_\varphi(\lambda)$ est une distribution (que l'on désigne généralement par $x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$).

c) Calculer la distribution définie plus haut pour les valeurs $\lambda = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

503*. Soit $f(x, y)$ une fonction lisse réelle sur le plan. Définissons la distribution $F_c \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ par la formule $\langle F_c, \varphi\rangle = \int\limits_{f(x,y)\leqslant c} \varphi(x, y)\,dx\,dy$.

a) Montrer que si existe $\dfrac{dF_c}{dc} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{F_{c+\varepsilon}-F_c}{\varepsilon}$ cette distribution est concentrée sur l'ensemble $f(x, y) = c$.

b) Montrer que $\dfrac{dF_c}{dc}$ existe si le gradient de f ne s'annule pas sur la droite $f(x, y) = c$.

c) Exprimer $\dfrac{dF_c}{dc}$ sous forme d'une intégrale curviligne.

504.** On définit une distribution $F_c \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ par la formule $\langle F_c, \varphi\rangle = \iiint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2+c} \varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$. Montrer que $\dfrac{dF_c}{dc}$ existe et exprimer F_c par des intégrales de surface.

505*. *Théorème du noyau.* Montrer que toute application linéaire continue $A : \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}'(\Omega_2)$ est de la forme

$$\langle A\varphi_1, \varphi_2\rangle = \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} K(x, y)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,dx\,dy,$$

où $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1\times\Omega_2)$.

506. On se place dans les hypothèses de l'exercice 505 et l'on suppose de plus que $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}$. Définir la forme générale des distributions $K \in \mathcal{D}'(R^2)$ sachant que A

a) est une injection canonique de $\mathcal{D}(R)$ dans $\mathcal{D}'(R)$;

b) est de la forme $\varphi \mapsto \varphi(a)\cdot\delta_b$.

5. Opérations sur les distributions.

507°. Calculer les dérivées des distributions suivantes :

a) $\operatorname{sgn} x$;

b) $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leqslant 0, \\ 1 & \text{pour} \quad x > 0 ; \end{cases}$

c) $[x]$, partie entière de x.

508°. Calculer les dérivées secondes des distributions suivantes :

a) $|x|$; c) $|\sin x|$;

b) $e^{-a|x|}$; d) $\sin x\cdot e^{-|x+a|}$.

509. Prouver les égalités :

a) $\delta(x)\times\delta(y) = \delta(x, y)$;

b) $\delta^{(k)}(x)\times\delta^{(l)}(y) = \dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}\,\delta(x, y)$;

c) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}f\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}f\right)$ pour $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$.

d) $\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\,dy,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$.

510°. a) Montrer que la distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ dont la dérivée F' est nulle est constante.

b) Montrer que toutes les solutions distributionnelles de l'équation $xF = 0$ sont proportionnelles à la fonction de Dirac.

511*. Montrer que toute distribution sur la droite de support au point $a \in \mathbf{R}$ est de la forme $P\left(\dfrac{d}{dx}\right)\delta_a(x)$, où P est un polynôme.

512. Supposons que $g \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ définit une bijection de la droite sur elle-même et soit $h \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ l'application réciproque. Exprimer la fonction $\delta'(g(x))$ au moyen de $\delta(x)$ et de ses dérivées.

513. On dit qu'une distribution F sur une droite est *homogène* de degré (λ, ε), où $\lambda \in \mathbf{C}$, $\varepsilon = 0$ ou 1, si $F(tx) = |t|^\lambda\,(\operatorname{sgn} t)^\varepsilon\,F(x)$ pour $t \neq 0$.

Montrer que les fonctions suivantes sont homogènes et trouver leur degré d'homogénéité :

a) $F(x) = |x|^\lambda$, $\quad \operatorname{Re}\lambda > -1$;

b) $F(x) = \operatorname{sgn} x$;

c) $F(x) = \delta(x)$;

d) $F(x) = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ (voir exercice 484) ;

e) $F(x) = \delta'(x)$.

514. Montrer que toute fonction homogène de degré (λ, ε) sur la droite (voir exercice 513) est solution de l'équation différentielle $xF' = \lambda F$.

515.** Montrer que pour tous les $\lambda \in \mathbf{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, il existe exactement, à un facteur numérique près, une distribution homogène de degré (λ, ε) sur la droite.

516*. Montrer que les constantes sont les seules distributions sur la droite invariantes par translation.

517*. Soit F une distribution sur le plan invariante par translation le long de l'axe Ox.

a) Montrer qu'il existe une distribution f sur la droite telle que $\langle F, \varphi\rangle = \left\langle f, \displaystyle\int_{\mathbf{R}}\varphi(x, y)\,dx\right\rangle$.

b) Exprimer F sous forme d'un produit direct.

518*. Soit F une distribution sur le plan de support l'intervalle [0, 1] de l'axe Ox.

a) Montrer qu'il existe un nombre N et des distributions $f_0, f_1, \ldots, f_N$ sur la droite telles que

$$\langle F, \varphi\rangle = \sum_{i=0}^{N} \left\langle f_i, \frac{\partial^i \varphi}{\partial y^i}\bigg|_{y=0}\right\rangle.$$

b) Formuler cette proposition en termes de produit direct de distributions.

519*. Montrer que la distribution régulière $f(x) = \exp(ie^x)$ appartient à $S'(\mathbf{R})$ mais que sa dérivée distributionnelle n'est pas confondue avec $f'(x) = ie^x e^{ie^x}$.

520. Résoudre l'équation $\sin x \cdot f(x) = 0$ au sens des distributions sur la droite.

521*. Soit F une distribution de $\mathbf{R}^n$, invariante par les rotations de $\mathbf{R}^n$, et telle que $\left(\sum_i x_i^2 - R^2\right) F(x) = 0$. Montrer que $\langle F, \varphi\rangle = c \int_{S_R} \varphi(x)\, d\sigma(x)$, où c est une constante et σ l'élément de volume sur la sphère S_R de rayon R de $\mathbf{R}^n$.

522. Soit F une distribution sur la droite telle que :

a) $F(x+1) = F(x)$;

b) $e^{2\pi i x} F(x) = F(x)$.

Montrer que $F(x) = c \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(x-k)$.

523. Montrer que toute distribution F sur la droite vérifiant l'équation $F'(x) = a(x) F(x) + b(x)$ $a, b \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ est régulière (donc confondue avec la solution ordinaire de cette équation).

524.** Soit F une distribution de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les dérivées partielles $\frac{\partial^k F}{\partial x_i^k}$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $0 \leqslant k \leqslant r$, appartiennent à $L_2(\mathbf{R}^n, dx)$. Montrer que F est confondue presque partout avec une fonction de la classe $C^l(\mathbf{R}^n)$ pour $r > \frac{n}{2} + l$.

525*. Sous quelle condition imposée aux coefficients $\{c_n\}$ la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$ converge-t-elle dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$?

526. Calculer les sommes des distributions :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx/n^2$;

b) $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{e^{inx}}{a^2+n^2}$;

c) $\sum_{n \in \mathbf{Z}} n^k e^{inx}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

527. Peut-on définir la multiplication sur $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de telle sorte qu'elle soit continue en chaque variable et coïncide avec la multiplication ordinaire par des fonctions régulières ?

528*. Calculer les dérivées distributionnelles :

a) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(x^2+y^2)$;

b) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

529. Soit $\mathcal{P}$ un polynôme de n variables. Définissons la distribution $\delta(\mathcal{P}(x))$ dans $\mathbf{R}^n$ comme la limite (si elle existe de la suite $\varphi_k(\mathcal{P}(x))$, où $\{\varphi_k\}$ est une δ-suite de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Calculer $\delta(\mathcal{P}(x))$ dans les cas suivants) :

a) $n = 1$, $\mathcal{P}(x) = x^2+px+q$;

b) $n = 2$, $\mathcal{P}(x, y) = x^2+y^2-1$;

c) $n = 2$, $\mathcal{P}(x, y) = x^2-y^2$;

d)* $n = 3$, $\mathcal{P}(x, y, z) = x^2+y^2-z^2$.

§ 4. Espaces hilbertiens

1. Géométrie de l'espace hilbertien.

530. a) Montrer que la correspondance $L \to \tilde{L}$ construite dans le paragraphe 1 du chapitre III de la « Théorie » définit un foncteur covariant de la catégorie des espaces préhilbertiens dans celle des espaces hilbertiens.

b) Montrer que $\tilde{L}$ peut être défini comme un objet universel dans une catégorie convenable.

531°. Montrer que le système de fonctions $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $n \in \mathbf{Z}$, est une base hilbertienne de $L_2([0, 1])$.

532*. Appliquer le processus d'orthogonalisation à la suite de monômes $1, x, x^2, \ldots$ dans les espaces hilbertiens suivants :

a) $L_2([-1, 1], dx)$;

b) $L_2\left([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

c) $L_2([0, \infty), e^{-x}\,dx)$;

d) $L_2(]-\infty, \infty[, e^{-x^2}\,dx)$.

533. Appliquer le processus d'orthogonalisation à la suite de monômes $1, z, z^2, \ldots$ dans les espaces préhilbertiens de polynômes munis des produits scalaires suivants :

a) $(P, Q) = \iint\limits_{|z| \leq R} P(z)\overline{Q(z)}\,dx\,dy$;

b) $(P, Q) = \iint\limits_{\mathbf{C}} P(z)\overline{Q(z)}e^{-|z|^2}\,dx\,dy$.

534*. Représenter par un produit scalaire la fonctionnelle linéaire $F_x(f) = f(x)$ sur les espaces de l'exercice 533.

535*. Montrer que les complétions des espaces préhilbertiens étudiés dans l'exercice 533 sont composées de toutes les fonctions analytiques de carré sommable pour la mesure $dx\,dy$ sur un disque de rayon R dans le cas a), et sommables pour la mesure $e^{-|z|^2}\,dx\,dy$ sur le plan dans le cas b).

536. Trouver les coefficients du développement des fonctions suivantes par rapport à la base de l'exercice 531 :

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(2x-1)$;

b) $f(x) = e^{\lambda x}$;

c)* $f(x) = B_k(x)$, où $\{B_k\}$ est une suite de *polynômes de Bernoulli*, définie de façon unique par les conditions :

1) $B_k'(x) = kB_{k-1}(x)$;

2) $B_k(0) = B_k(1)$ pour $k > 1$;

3) $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

537*. Montrer que l'orthocomplément du système de fonctions $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $n \in \mathbf{Z}$, dans l'espace $L_2([a, b], dx)$ est :

a) nul pour $|b-a| \leqslant 1$;

b) différent de 0 pour $|b-a| > 1$.

538*. Soit B_0 l'espace des polynômes trigonométriques (c'est-à-dire des combinaisons linéaires finies des fonctions $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$). Munissons B_0 du produit scalaire

$$(f, g) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

a) Montrer que l'espace hilbertien correspondant B n'est pas séparable et possède une base hilbertienne $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ qui a la puissance du continu.

b)** Montrer que B contient l'espace des *fonctions continues quasi périodiques*, c'est-à-dire l'adhérence de B_0 pour la norme uniforme $\|f\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$, mais n'est pas confondu avec lui.

539*. Soit μ une mesure sur la droite définie par $\mu(A) = \operatorname{card} A$ (le nombre de points de A). Montrer que $L_2(\mathbf{R}, \mu)$ n'est pas séparable et est isomorphe à l'espace de l'exercice 538.

540. Montrer que $L_2\ [a, b]$ contient des systèmes orthonormaux complets constitués de :

a) polynômes ;

b) fonctions en escalier ;

c) polynômes trigonométriques ;

d) fonctions contenues dans un sous-espace dense donné à priori.

541. Le *système de fonctions de Haar* $\{\varphi_{mn}\}$, $m \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant n \leqslant 2^m$, se définit par

$$\varphi_{m,n}(x) = \begin{cases} 2^{m/2} & \text{si} \quad \dfrac{n-1}{2^m} \leqslant x < \dfrac{n-1/2}{2^m}, \\ -2^{m/2} & \text{si} \quad \dfrac{n-1/2}{2^m} \leqslant x < \dfrac{n}{2^m}, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \left[\dfrac{n-1}{2^m}, \dfrac{n}{2^m}\right[. \end{cases}$$

Montrer que ce système est une base orthonormale dans $L_2(]0, 1[)$.

542. Le *système de fonctions de Rademacher* $\{\varphi_m(x)\}$, $m \in \mathbf{N}$, se définit par $\varphi_m(x) = (-1)^{[2^m x]}$, où [ ] représente la partie entière d'un nombre.

a) Montrer que le système de Rademacher est orthonormal mais pas complet dans $L_2(]0, 1[)$.

b) Montrer que le *système de fonctions de Walsh* défini par $\varphi_{m_1}, \ldots, \varphi_{m_n}(x) = \varphi_{m_1}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{m_n}(x)$, où $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$, et φ_{m_i} sont des fonctions de Rademacher, est orthonormal et complet dans $L_2(]0, 1[)$.

543°. Trouver dans l'espace hilbertien $L_2(]0, 1[)$ l'orthocomplément des ensembles suivants de :

a) polyhômes de x ;
b) polynômes de x^2 ;
c) polynômes de terme libre nul ;
d) polynômes de somme de coefficients nulle.

544°. Dans l'espace préhilbertien $C[-1, 1]$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni du produit scalaire $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, trouver l'orthocomplément des espaces de :

a) fonctions nulles pour $x \leqslant 0$;
b) fonctions nulles en $x = 0$.

Le théorème du complément orthogonal est-il vrai dans ces cas ?

545°. Calculer les angles du triangle dont les sommets sont les points $f_1(x) \equiv 0, f_2(x) \equiv 1, f_3(x) = x$ de $L_2(]-1, 1[)$.

546. Soit e_t la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, t]$, $t \geqslant 0$. Trouver les angles de deux cordes de la courbe e_t dans $L_2(]0, \infty[)$ dans le cas où ces cordes ont

a) une extrémité commune et des sens différents ;
b) une extrémité commune et le même sens.

547. a) Montrer que dans tout espace préhilbertien on a l'*identité du parallélogramme :*

$$||x-y||^2+||x+y||^2 = 2\,||x||^2+2\,||y||^2.$$

b)* Montrer que tout espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, dans lequel cette identité a lieu, peut être muni d'un produit scalaire tel que $||x||^2 = (x, x)$.

548. Montrer que dans un espace hilbertien complexe

a) $(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} ||x+e^{2\pi ik/N}y||^2 e^{2\pi ik/N}$ pour $N \geqslant 3$;

b) $(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ||x+e^{i\theta}y||^2 e^{i\theta}\, d\theta.$

549. Soit dans un espace hilbertien H une famille de vecteurs $\{x_n\}$ telle que $||x_n|| = 1$, $(x_n, x_m) = c$ pour $m \neq n$. Montrer que la suite $\{x_n\}$ converge faiblement.

550. Soit $\{x_n\}$ un système orthogonal de vecteurs. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\sum_n x_n$ converge fortement ;

b) $\sum_n x_n$ converge faiblement ;

c) $\sum_n ||x_n||^2$ converge.

551°. Soit S un sous-ensemble quelconque dans un espace hilbertien H. Montrer que $(S^\perp)^\perp$ est confondu avec l'adhérence de l'enveloppe linéaire de S.

552. Soient L un sous-espace d'un espace hilbertien H, f_0, une fonctionnelle linéaire continue sur L. Montrer que f_0 se prolonge de façon unique à H avec préservation de la norme.

2. Opérateurs dans l'espace hilbertien.

553°. a) Montrer que tout opérateur A dans un espace hilbertien complexe H se représente de façon unique par $A = B+iC$, où B et C sont des opérateurs hermitiens. (On écrit parfois $B = \operatorname{Re} A$, $C = \operatorname{Im} A$.)

b) Vérifier que A est normal si et seulement si $\operatorname{Re} A$ et $\operatorname{Im} A$ commutent.

c) Montrer que l'opérateur A est unitaire si et seulement si il est normal et $(\operatorname{Re} A)^2+(\operatorname{Im} A)^2 = 1$.

554. Montrer que

a) tout opérateur P, dans un espace hilbertien tel que $P^2 = P^* = P$, est un orthoprojecteur, c'est-à-dire un projecteur sur un sous-espace fermé H_1 parallèlement à son orthocomplément H_2 ;

b) tout opérateur S, tel que $S^{-1} = S^* = S$, est un réflecteur orthogonal dans un sous-espace.

555. Montrer les égalités $||A^*A|| = ||AA^*|| = ||A||^2 = ||A^*||^2$ pour tout opérateur borné A dans un espace hilbertien H.

556. Soient A un opérateur positif dans un espace préhilbertien H, x un vecteur arbitraire de H.

a) Montrer que la suite de nombres $a(k) = \ln(A^k x, x)$ est convexe, c'est-à-dire que $a\left(\frac{k+l}{2}\right) \leqslant \frac{a(k)+a(l)}{2}$.

b) Montrer que $||Ax||^2 \leqslant Q_A(x)\cdot||A||$, où $Q_A(x) = (Ax, x)$.

557. Soit $\{A_n\}$ une suite bornée monotone d'opérateurs dans un espace hilbertien H. Montrer l'existence de $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

558. Soient H_1 un sous-espace fermé dans un espace hilbertien H, $H_2 = H_1^{\perp}$, P, un orthoprojecteur sur H_1, A, un opérateur dans H. Exprimer les assertions suivantes sous forme de relations algébriques entre A et P :

a) H_1 est invariant par A ;

b) H_1 et H_2 sont invariants par A.

559. On dit qu'un couple (L_1, L_2) de sous-espaces de dimension finie d'un espace hilbertien H (sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$) est *congru* à un couple (M_1, M_2) s'il existe un opérateur unitaire U dans H qui applique L_1 dans M_1 et L_2 dans M_2. Les conditions nécessaires de congruence sont $\dim L_1 = \dim M_1$, $\dim L_2 = \dim M_2$. On admettra que ces conditions sont satisfaites. Soient P_i un orthoprojecteur sur L_i, Q_i un orthoprojecteur sur M_i, $i = 1, 2$.

a) Supposons que $\dim L_i = \dim M_i = 1$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante de congruence des couples (L_1, L_2) et (M_1, M_2) dans un espace réel est l'égalité des angles des vecteurs engendrant ces espaces.

b) Exprimer l'angle des vecteurs engendrant les espaces L_1 et L_2 en fonction des projecteurs P_1 et P_2.

c) Etablir un critère de congruence de deux couples de sous-espaces de dimension un d'un espace complexe.

560. Dans les notations de l'exercice 559 supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont les valeurs propres de l'opérateur $P_1P_2P_1$.

a) Montrer que λ_i sont des réels compris entre 0 et 1.

b) Montrer que le nombre de λ_i non nulles est $\leqslant k = \min(\dim L_1, \dim L_2)$. Rangeons-les dans l'ordre de décroissance et posons $\varphi_i = \arccos\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Les nombres φ_i s'appellent *angles des sous-espaces* L_1 et L_2.

c) Si $\dim L_1 = 1$ et $\dim M_1 = 1$, l'angle φ_1 de L_1 et de L_2 et l'angle ψ_1 de M_1 et de M_2 sont uniques. Montrer que les couples (L_1, L_2) et (M_1, M_2) sont congrus si et seulement si $\varphi_1 = \psi_1$.

d)* Prouver le critère général de congruence : le couple (L_1, L_2) est congru au couple (M_1, M_2) si et seulement si les angles de L_1 et de L_2 sont égaux aux angles respectifs de M_1 et de M_2.

e) On appelle *écart entre les espaces* L_1 et L_2 le nombre $\|P_1 - P_2\|$. Exprimer ce nombre en fonction des angles de L_1 et L_2.

561°. Montrer que pour qu'un opérateur $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ soit unitaire il est nécessaire qu'il applique toute base hilbertienne de H_1 dans une base de H_2 et suffisant qu'il applique une certaine base de H_1 dans une base de H_2.

562°. A étant un opérateur quelconque dans un espace hilbertien, montrer que :

a) $(\operatorname{im} A)^{\perp} = \ker A^*$;

b) $(\ker A)^{\perp} = \overline{(\operatorname{im} A^*)}$

(la barre désigne l'adhérence).

563. Supposons qu'une suite d'opérateurs $\{A_n\}$ dans un espace hilbertien H converge faiblement vers A, et, de plus, que $||A_n x|| \to ||Ax||$ pour tout $x \in H$. Montrer que $\{A_n\}$ converge fortement vers A. Cela signifie en particulier que pour les suites d'opérateurs unitaires il y a identité entre la convergence forte et la convergence faible vers un opérateur unitaire.

564. Soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés dans un espace hilbertien H. Montrer que tout automorphisme de $\mathcal{L}(H)$ commutant avec l'opération de conjugaison est de la forme $A \mapsto UAU^{-1}$, où U est un opérateur unitaire dans H.

565*. Trouver tous les idéaux fermés pour la norme dans l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ (voir exercice 564) pour un espace hilbertien séparable H.

566. Déduire du théorème de Courant le *principe d'interposition* suivant. Soient A un opérateur hermitien compact dans un espace hilbertien H, H_1, un sous-espace fermé de codimension 1 de H (c'est-à-dire dim $H_1^{\perp} = 1$), P, un orthoprojecteur sur H_1. Alors les valeurs propres $\{\lambda_i\}$ de l'opérateur A et celles $\{\mu_i\}$ de l'opérateur PAP, rangées comme dans le théorème de Courant, sont telles que

$$\lambda_{-1} \leqslant \mu_{-1} \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \ldots \leqslant 0 \leqslant \ldots \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_1.$$

567*. a) Montrer que tout opérateur positif A dans un espace hilbertien possède une racine carrée positive B qui peut être obtenue comme la limite forte d'une suite B_n définie par la condition initiale $B_0 = 0$ et par la formule de récurrence $B_{n+1} = B_n + \dfrac{A - B_n^2}{2\sqrt{||A||}}$.

b) Montrer que la racine carrée positive B d'un opérateur positif A est unique.

568. a) Montrer que dans un espace hilbertien de dimension finie H tout opérateur A peut se mettre sous la forme $A = RU$ et $A = VS$, où R et S sont des opérateurs positifs, et U et V, des opérateurs unitaires. Cette décomposition est dite *décomposition polaire* de A. (Si dim $H = 1$ elle se ramène à l'écriture d'un nombre complexe a sous la forme $re^{i\varphi}$.)

b) Montrer que R et S se définissent de façon unique à l'aide de l'opérateur A. Ceci est-il valable pour U et V ?

c) Vérifier que l'opérateur T de translation unilatérale dans l_2 n'admet pas de décomposition polaire au sens du n° *a*).

569. Soient U un opérateur dans un espace hilbertien H, H_1, l'orthocomplément de ker U, H_2, l'adhérence de im U. On dit qu'un opérateur U est *partiellement isométrique* s'il applique isométriquement H_1 sur H_2. Exprimer cette propriété en termes d'orthoprojecteur P_1 et P_2 sur H_1 et H_2.

570. Soit A un opérateur dans un espace hilbertien H ; montrer que A se représente de façon unique sous la forme $A = RU$, où R est un opérateur positif et U un opérateur partiellement isométrique (voir exercice 569) tel que ker U = ker A. Cette représentation s'appelle aussi *décomposition polaire* de A. (Comparer avec l'exercice 568.)

571. On dit qu'un opérateur A est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* si la série $\sum_{\beta \in B} ||Ax_\beta||^2$ converge dans une base hilbertienne $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$.

a) Montrer que si A est un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors la quantité $\|A\|_2 = \left(\sum_{\beta \in B} \|Ax_\beta\|\right)^{1/2}$ ne dépend pas du choix de la base et définit sur l'espace $\mathcal{L}_2(H)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt une norme majorant la norme ordinaire d'un opérateur.

b) Montrer que la norme $\|\cdot\|_2$ est engendrée par le produit scalaire $\langle A, B\rangle_{\mathcal{L}_2(H)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} (Ay_\gamma, By_\gamma)_H$, où $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ est une base quelconque de H.

c) Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

d) Construire un isomorphisme de l'espace $\mathcal{L}_2(H)$ sur le produit tensoriel hilbertien de H par H'.

e) Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt dans $L_2(X, \mu)$ est un opérateur intégral de noyau $K \in L_2(X \times X, \mu \times \mu)$.

572. On dit qu'un opérateur A d'un espace hilbertien H est *nucléaire* s'il se représente sous la forme $A = BC$, où B et C sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Montrer que

a) si A est un opérateur nucléaire, alors pour toute base $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de H la série $\sum (Ay_\gamma, y_\gamma)$ converge et sa somme ne dépend pas du choix de ladite base ; cette somme s'appelle *trace de l'opérateur* A et se note tr A ;

b) si A est nucléaire et B un opérateur borné, alors AB et BA sont des opérateurs nucléaires et tr AB = tr BA.

c) L'ensemble de tous les opérateurs nucléaires forme un espace de Banach $\mathcal{L}_1(H)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|A\| = \operatorname{tr} R$, où $A = RU$ est la décomposition polaire de A.

d) Supposons que $\mathcal{K}(H)$ est l'espace des opérateurs compacts dans H muni de la norme ordinaire. Montrer les isomorphismes : $\mathcal{K}(H)' \approx \mathcal{L}_1(H)$, $\mathcal{L}_1(H)' \approx \mathcal{L}(H)$.

573. Trouver les valeurs et les vecteurs propres de l'opérateur intégral A de $L_2[0, 1]$ défini par la formule $(Af)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy$ si

a) $K(x, y) = \cos 2\pi(x-y)$;

b) $K(x, y) = \min(x, y)$.

574*. Soient H un espace hilbertien, X un ensemble de mesure μ. On dit que les vecteurs unitaires $\{\xi_x\}_{x \in X}$ de H forment une *base continue* (ou cohérente ou encore saturée) si pour tout $\xi \in H$ la fonction $x \mapsto (\xi, \xi_x)$ est μ-mesurable et

$$\|\xi\|^2 = \int_X |(\xi, \xi_x)|^2\, d\mu(x).$$

a) Construire des bases continues dans les espaces de l'exercice 533.

b) Montrer que l'application $\xi \mapsto (\xi, \xi_x)$ est une isométrie de H dans $L_2(X, \mu)$.

c) Montrer que dim $H = \mu(X)$.

d)** Prouver que $\operatorname{tr} A = \int_X (A\xi_x, \xi_x)\, d\mu(x)$, où A est un opérateur nucléaire.

575**. Soit A un opérateur intégral nucléaire de l'espace $L_2[0, 1]$ de noyau continu $K(x, y)$. Montrer que

$$\operatorname{tr} A = \int_0^1 K(x, x)\, dx.$$

CHAPITRE 4

TRANSFORMATION DE FOURIER ET ÉLÉMENTS D'ANALYSE HARMONIQUE

§ 1. Produits de convolution sur un groupe commutatif

1. Produits de convolution des fonctions de base.

576. Soient G un groupe fini, K un corps.

a) Montrer que le centre de $K[G]$ est composé des fonctions $a \in K[G]$ telles que $a(gh) = a(hg)$, $\forall h$, $\forall g \in G$.

b) On appelle *classe d'éléments conjugués* de G un ensemble de la forme $C_h = \{ghg^{-1}, g \in G\}$. Montrer que le nombre des classes distinctes d'éléments conjugués de G est égal à la dimension du centre de $K[G]$.

c) On sait que l'algèbre $K[G]$ est commutative. En est-il de même du groupe G ?

577. Désignons par C_n un groupe cyclique d'ordre n.

a) Montrer que $\mathbf{C}[C_n]$ est isomorphe à la somme directe de n exemplaires du corps $\mathbf{C}$.

b) En est-il de même du corps $\mathbf{R}$?

578*. Montrer que $\mathbf{R}[S_3]$ et $\mathbf{R}+\mathbf{R}+\mathrm{Mat}_2\,\mathbf{R}$ sont isomorphes.

579*. Montrer que l'injection canonique de G dans $K[G]$ est un objet universel pour la catégorie des applications φ du groupe G dans des K-algèbres unitaires associatives telles que $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$, $\varphi(1) = 1$. (On appelle morphisme d'un objet φ: $G \to A$ dans un objet ψ: $G \to B$ un homomorphisme χ: $A \to B$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\chi"] \\ G \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif.) Peut-on s'affranchir de la condition $\varphi(1) = 1$?

580. Expliciter le produit de convolution des fonctions caractéristiques de deux intervalles fermés de $L_1(\mathbf{R}, dx)$.

581°. Supposons que $G = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{T}^n$. Montrer que la convolée de deux fonctions bornées de $L_1(G, \mu)$ est une fonction continue.

582. Calculer la convolée $f_1 * f_2$ dans $L_1(\mathbf{R}, dx)$ si

a) $f_1(x) = 1/(x^2+a^2)$, $f_2(x) = 1/(x^2+b^2)$;
b) $f_1(x) = e^{-x^2/2a}$, $f_2(x) = e^{-x^2/2b}$.

583°. Soient φ une fonction de $\mathbf{R}^n$ à support borné k fois continûment différentiable, f, une fonction de $L_1(\mathbf{R}^n, dx)$. Montrer que la convolée $\varphi * f$ est aussi k fois continûment différentiable.

584. Soit L un espace de Banach de fonctions sur un groupe G muni d'une norme $\|\cdot\|_L$ telle que

1) $\|T(a)f\|_L = \|f\|_L$, où $T(a)$ est l'opérateur de translation : $T(a)f(x) = f(x+a)$;

a) $\|T(a)f-f\|_L \to 0$ pour $a \to 0$ dans G.

Montrer que l'opérateur $S(\varphi)$, $\varphi \in L_1(G, \mu)$ applique l'espace L dans lui-même et possède sur cet espace une norme $\leqslant \|\varphi\|_{L_1}$.

585. On dit qu'une suite de fonctions $\{f_k\}$ sur un espace topologique X muni d'une mesure borélienne μ est une *δ-suite* pour un point $a \in X$ si

1) $f_k(x) \geqslant 0$ sur X ;

2) $\int\limits_X f_k(x)\,d\mu(x) = 1$;

3) $\int\limits_{X\setminus U} f_k(x)\,d\mu(x) \to 0$ pour $k \to \infty$ pour tout voisinage U du point a.

Montrer que les suites suivantes sont des δ-suites pour le point $0 \in \mathbf{R}^n$:

a)* $f_n(x) = k^n\varphi(kx)$, où φ est une fonction borélienne quelconque sur $\mathbf{R}^n$, possédant les propriétés 1) et 2) ;

b) $f_n(x) = \begin{cases} c_k(1-\|x\|^2)^k & \text{pour} \quad \|x\| \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour} \quad \|x\| > 1, \end{cases}$

où $\{c_k\}$ est une suite convenable de constantes.

586. Soient G un groupe topologique commutatif, muni d'une mesure invariante μ, $\{f_k\}$ une δ-suite pour un point $a \in G$ (voir exercice 585), L, un espace de Banach de fonctions sur G, vérifiant les conditions de l'exercice 584.

Montrer que $S(f_k) \to T(a)$ pour $k \to \infty$.

587. Supposons qu'une fonction φ définie sur $\mathbf{R}^n$ est confondue avec un polynôme à l'intérieur d'une boule de rayon R et égale à 0 en dehors de cette boule ; soit $\psi \in L_1(\mathbf{R}^n, dx)$ une fonction de support dans une boule de rayon $r < R$.

Montrer que la convolée $\varphi * \psi$ a son support dans une boule de rayon $R+r$ et est confondue avec un polynôme dans la boule de rayon $R-r$. (Toutes les boules sont centrées en 0.)

588*. *Théorème de Weierstrass.* Montrer que toute fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ peut être uniformément approchée par un polynôme sur un compact quelconque.

589. Soit $f \in L_1(G, \mu)$. Montrer que $S(f)$ est un opérateur borné dans un espace hilbertien $L_2(G, \mu)$. Calculer l'opérateur adjoint $S(f)^*$.

590. Soient f_1 et f_2 des fonctions de $L_2(G, \mu)$. Montrer que la convolée $f_1 * f_2$ est définie et appartient à $L_\infty(G, \mu)$.

591. Définissons l'opération $*$ sur l'espace des fonctions sur un groupe G en posant $f^*(x) = \overline{f(-x)}$.

Montrer que

a) $f_1^* * f_2^* = (f_1 * f_2)^*$ pour $f_1, f_2 \in L_1(G, \mu)$;

b) $(f_1 * f_2^*)(0) = (f_1, f_2)$ pour $f_1, f_2 \in L_2(G, \mu)$.

592. Définissons une fonction e_k sur $\mathbf{T}^n$ en posant $e_k(t) = e^{2\pi i k t}$ ($k \in \mathbf{Z}^n$ est un multi-indice, $kt = k_1 t_1 + \ldots + k_n t_n$).

Montrer que

$$e_k * e_k = e_k, \quad e_k * e_j = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq j.$$

593. On appelle *polynôme trigonométrique* sur $\mathbf{T}^n$ une combinaison linéaire de fonctions e_k définies dans l'exercice 592. Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques forme un idéal dans l'algèbre $L_1(\mathbf{T}^n, dt)$.

594*. Construire sur le tore $\mathbf{T}^n$ une δ-suite composée de polynômes trigonométriques.

595. Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est partout dense dans $C^k(\mathbf{T}^n)$ pour tout k.

596°. a) Expliciter les quatre premiers polynômes $B_k(t)$ de Bernoulli de l'exercice 536c).

b) Calculer $B_1 * B_1$ sur $[0, 1]$.

597*. Soient f_1 et f_2 des fonctions localement sommables dont les supports sont bornés à gauche. On peut alors définir le produit de convolution $f_1 * f_2$ qui possède la même propriété. Calculer les produits de convolution :

a) $[\theta(x)x^\alpha] * [\theta(x)x^\beta]$;

b) $[e^{\alpha x}\theta(x)] * [e^{bx}\theta(x)]$.

598.** Soient des nombres $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ tels que $1/p + 1/q - 1/r = 1$. Montrer que

$$L_p(G, \mu) * L_q(G, \mu) \subset L_r(G, \mu).$$

2. Produits de convolution des distributions.

599°. Expliciter les convolées suivantes sur la droite :

a) $\delta_a * \delta_b$; c) $\delta' * \theta(x)$;

b) $\delta_a * \theta(x)$; d) $\delta' * 1$.

600°. Représenter par un produit de convolution l'opérateur de différentiation L : $f \to \sum_{k=0}^{n} c_k f^{(k)}$, c_k étant des coefficients constants.

601°. Prouver l'identité $f * 1 = \langle f, 1\rangle \cdot 1$ pour toute distribution $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$.

602°. Soit $f_1 = \chi_{[a,b]}$, $f_2 = \chi_{[c,d]}$. Calculer $(f_1 * f_2)''$.

603. Posons $\check{f}(x) = f(-x)$. Démontrer l'identité $(f_1 * f_2)^\vee = \check{f}_1 * \check{f}_2$, où f_1 et f_2 sont des distributions dont l'une est à support compact.

604*. Soient $f \in S'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. La convolée $f * \varphi$ est définie par $f * \varphi = S(\check{\varphi})'f$, c'est-à-dire que $\langle f * \varphi, \psi\rangle = \langle f, \varphi * \psi\rangle$. Montrer que

a) $f * \varphi$ est une distribution régulière ;

b) $(f*\varphi)(x) = \langle f, T(-x)\check{\varphi}\rangle$;

c) $(f*\varphi)(x)$ croît à l'infini pas plus vite qu'une puissance de $|x|$.

605*. Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. La convolée $f*\varphi$ est définie par $f*\varphi = S(\check{\varphi})'f$ (comparer avec l'exercice 604). Montrer que

a) $f*\varphi$ est une distribution régulière ;

b) $f*\varphi(x) = \langle f, T(-x)\check{\varphi}\rangle$;

c) $f*\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$;

d) l'opérateur $S(f)$: $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ est continu.

606*. Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Prouver la continuité de l'opérateur $S(f)$: $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.

607. Soient $\mathcal{E}(\mathbf{T}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur le tore $\mathbf{T}^n$ (muni de la topologie de convergence uniforme de toutes les dérivées), $\mathcal{E}'(\mathbf{T}^n)$ les espaces duals de distributions. Définir le produit de convolution sur $\mathcal{E}'(\mathbf{T}^n)$ et montrer que $\mathcal{E}'(\mathbf{T}^n)*\mathcal{E}(\mathbf{T}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbf{T}^n)$.

608. Soit $\varphi_N(t) = (\sin(2N+1)\pi t/\sin \pi t)^2/(2N+1)$. Montrer que $\lim\limits_{N\to\infty} \varphi_N(t) = \delta(t)$.

609. Montrer que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{E}(\mathbf{T})$.

610. Même exercice pour $\mathcal{E}(\mathbf{T}^n)$.

611°. Ecrire les opérateurs aux différences suivants sous forme de produit de convolution et calculer leurs limites pour $h \to 0$:

a) $A_h f(x) = [f(x+h)-f(x-h)]/2h$,

b) $B_h f(x) = [f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]/h^2$.

612. a) Trouver la dérivée distributionnelle d'ordre k du polynôme de Bernoulli $B_k(t)$ sur $\mathbf{T}$.

b) Prouver l'identité $B_k * B_l = -\dfrac{k!\,l!}{(k+l)!} B_{k+l}$ pour $k > 0$, $l > 0$.

613. Soit f une distribution définie sur $\mathbf{T}$ par

$$\langle f, \varphi\rangle = \mathcal{P}\int_0^1 \operatorname{tg} \pi t \varphi(t)\, dt = \int_0^{1/2} \operatorname{tg} \pi t[\varphi(t)-\varphi(1-t)]\, dt.$$

a) Calculer la convolée $f*e_k$, où $e_k(t) = e^{2\pi i k t}$.

b) Calculer la convolée $f*f$.

614*. Soient

$$f_1(x, y) = \delta(x^2+y^2-r_1^2), \quad f_2(x, y) = \delta(x^2+y^2-r_2^2).$$

Calculer la convolée f_1*f_2 sur $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$.

615*. Soient f_1 et f_2 des fonctions continues à support borné sur $[0, \infty[$. Posons $F_i = f_i(\sqrt{x^2+y^2})$.

Montrer que la convolée $F = F_1*F_2$ est aussi de la forme $F(x, y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$, où f est une fonction continue à support borné sur $[0, \infty[$ et exprimer f en fonction de f_1 et f_2.

616*. Soient $\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{D}'_{\pm}(\mathbf{R})$ les sous-espaces respectivement de $\mathcal{E}(\mathbf{R})$, et de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, composés des fonctions à support borné à gauche ou à droite.

a) Montrer que $(\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{R}))'$ est isomorphe à $\mathcal{D}'_{\pm}(\mathbf{R})$ (la convergence $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{R})$ est définie par les conditions : supp φ_n sont bornés d'un côté par une constante commune ; $\varphi_n \to \varphi$ au sens de la convergence dans $\mathcal{E}(\mathbf{R})$).

b) Définir le produit de convolution sur $\mathcal{D}'_{\pm}(\mathbf{R})$.

c) Montrer que $\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{R}) * \mathcal{D}'_{\pm}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{R})$.

617*. Pour $\alpha > 0$ posons $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\theta(x)$.

a) Vérifier que $f_\alpha \in \mathcal{D}'_{+}(\mathbf{R})$ pour $\alpha > -1$.

b) Démontrer l'identité $\dfrac{d}{dx} f_\alpha = f_{\alpha-1}$ pour $\alpha > 1$.

c) Démontrer l'identité $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

d) Trouver la limite de f_α pour $\alpha \to 0$ dans $\mathcal{D}'_{+}(\mathbf{R})$.

618*. Construire dans $\mathcal{D}'_{+}(\mathbf{R})$ une famille d'opérateurs $I(\alpha)$ telle que

a) $I(\alpha)\, I(\beta) = I(\alpha+\beta), \quad I(0) = 1$;

b) $I(1)\,\varphi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt \quad$ pour $\quad \varphi \in \mathcal{E}'_{+}(\mathbf{R})$;

c) $I(-1)\,\varphi(x) = \varphi'(x) \quad$ pour $\quad \varphi \in \mathcal{E}'_{+}(\mathbf{R})$;

d) $I(\alpha)\, f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ pour $\beta > -1$, $\alpha+\beta > -1$ (f_α sont définies dans le problème 617).

L'opérateur $I(\alpha)$ s'appelle *opérateur d'intégration fractionnaire* d'ordre α (ou *différentiation fractionnaire* d'ordre $-\alpha$) et se note parfois $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{-\alpha}$.

619. Calculer les intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire suivantes :

a) $I\left(\dfrac{1}{2}\right)\chi_{[0,1]}(x)$;

b) $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{1/2} \theta(x)$;

c)* $I(1/2)\,[J_0(\sqrt{x})\,\theta(x)]$,

où $J_0(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ est une *fonction de Bessel.*

620*. Soit f une distribution sur $\mathbf{R}^2$ de la forme

$$\langle f, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\cos t, \sin t)\, dt.$$

Montrer que $f * f$ est une distribution et calculer-la.

621*. Calculer la convolée $f * f$, où f est une distribution sur $\mathbf{R}^3$, définie par $\langle f, \varphi\rangle = \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_S \varphi(x_1, x_2, x_3)\, d\sigma$, où S est la sphère $||x|| = 1$, $d\sigma$ l'élément de surface de la sphère.

§ 2. Transformation de Fourier

1. Caractères d'un groupe commutatif.

622°. Expliciter les caractères d'un groupe cyclique C_n d'ordre n.

623. Montrer que tout groupe commutatif fini G est isomorphe (non canoniquement) à son dual $\hat{G}$.

624. On appelle *caractère généralisé* ou *non unitaire* d'un groupe G un homomoprhisme de ce groupe dans le groupe multiplicatif du corps des complexes.

Montrer que les caractères généralisés d'un groupe compact G sont ordinaires. Trouver les caractères généralisés des groupes : a) $\mathbf{Z}$, b) $\mathbf{R}$, c) $\mathbf{C}$, d) $\mathbf{R}^*$, e) $\mathbf{C}^*$ ($*$ désigne un groupe multiplicatif).

625*. Montrer que si un groupe G est compact, son dual $\hat{G}$ est discret.

626*. Montrer que si un groupe G est discret, son dual $\hat{G}$ est compact.

627. Soit χ un caractère du groupe $\mathbf{R}$, considéré comme un élément de l'espace $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Montrer que χ est solution de l'équation différentielle $\chi' = c\chi$, où c est une constante.

628°. Soient χ un caractère d'un groupe G, $f \in L_1(G, \mu)$. Montrer que $\chi * f = cf$, où

$$c = \chi * f(0) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, d\mu(x).$$

629°. Soit G un groupe compact muni d'une mesure invariante normée par la condition $\mu(G) = 1$. Montrer que pour deux caractères quelconques $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ on a

$$\chi_1 * \chi_2 = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \chi_1 \neq \chi_2, \\ 1, & \text{si} \quad \chi_1 = \chi_2. \end{cases}$$

630. Montrer que tous les caractères du groupe $\mathbf{T}^n$ sont épuisés par les fonctions $e_k(t) = e^{2\pi i k t}$(comparer avec l'exercice 592).

631*. Montrer que la correspondance $G \to \hat{G}$ définit un foncteur contravariant dans la catégorie des groupes abéliens topologiques.

632°. Soit L un espace localement convexe sur le corps $\mathbf{R}$, considéré comme un groupe abélien topologique. Trouver le groupe $\hat{L}$ dual de L.

633.** Soient $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques (voir exercice 38), $\mathbf{Z}_p$ le sous-anneau des nombres p-adiques. Trouver les duals des groupes suivants : a) $\mathbf{Q}_p$, b) $\mathbf{Z}_p$, c) $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

634.** Soient G_0 un sous-groupe fermé dans G, $G_1 = G/G_0$ le groupe quotient correspondant. On note ceci succinctement sous forme de la suite exacte

$$0 \to G_0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G_1 \to 0$$

où 0 est le groupe trivial composé d'un seul élément. Montrer que la suite duale

$$0 \leftarrow \hat{G}_0 \xleftarrow{\hat{i}} \hat{G} \xleftarrow{\hat{p}} \hat{G}_1 \leftarrow 0$$

est aussi exacte.

635*. Trouver le dual $\hat{G}$ de $G = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. (Il est naturel d'identifier le groupe G au groupe des racines de l'unité par l'application $x \bmod \mathbf{Z} \to e^{2\pi i x}$.)

636. Soit $G = \prod_{n=1}^{\infty} C_2$ le groupe de toutes les suites composées de 0 et de 1 (l'opération de groupe est l'addition modulo 2 ; la topologie, celle de la convergence en coordonnées).

a) Montrer que G est compact.

b) Montrer que le groupe dual est isomorphe au groupe dénombrable $\sum_{n=1}^{\infty} C_2$ de toutes les suites à support borné de 0 et de 1 (l'opération de groupe est l'addition modulo 2, la topologie est discrète).

c) Etablir une correspondance mesurable entre G et $[0, 1]$ associant aux caractères de G les fonctions de Walsh (voir exercice 542).

637. Soient α un nombre irrationnel, $f \in L_1(\mathbf{T}, dt)$ une fonction telle que $f(t+\alpha) = f(t)$ presque partout. Montrer que f est presque partout constante.

638. a)° Soit $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$. Montrer que $\tilde{f}(\lambda) \to 0$ pour $\lambda \to \infty$.

b) Soient G un groupe de la forme $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m \times \mathbf{Z}^k$, $f \in L_1(G, \mu)$. Montrer que $\tilde{f}(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ dans $\hat{G} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^m \times \mathbf{T}^k$.

639.** Soit $G = \mathbf{Q}_p^+$ un groupe additif du corps des nombres p-adiques. Désignons par $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions localement constantes à support borné. Montrer que la transformation de Fourier applique $\mathcal{D}(G)$ dans lui-même.

640. Soit $S(\mathbf{Z})$ l'espace des suites bilatérales $\{c_n\}$ telles que $c_n = O(n^{-k})$ pour tous les k. Définissons la topologie de $S(\mathbf{Z})$ par la famille de normes

$$p_k(\{c_n\}) = \sup_n |n^k c_n|, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Montrer que la transformation de Fourier définit un isomorphisme entre les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{E}(\mathbf{T})$ et $S(\mathbf{Z})$.

641. On dit qu'une fonction continue f sur un groupe G est *définie positive* si pour toute collection finie d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ de G, la matrice A d'éléments $a_{kj} = f(x_k - x_j)$ est définie positive. Prouver les relations suivantes pour la fonction définie positive f :

a) $|f(x)| \leqslant f(0)$, $f(x) = \overline{f(-x)}$;

b) $|f(0) f(x-y) - f(x) f(\bar{y})|^2 \leqslant (f^2(0) - |f(x)|^2)(f^2(0) - |f(y)|^2)$;

c) si $|f(x)| \equiv 1$, alors $f \in \hat{G}$.

642. a) Montrer qu'une combinaison linéaire de caractères d'un groupe G de coefficients positifs est une fonction définie positive sur G.

b) Montrer que le produit de deux fonctions définies positives est une fonction définie positive.

c) Montrer que si $\varphi \in L_1(G, \mu)$, alors la fonction $\varphi * \varphi^*$ (où $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$) est définie positive.

643. Soit $\hat{G}$ un groupe fini. Montrer que f est définie positive sur G si et seulement si la fonction $\tilde{f}$ est positive sur $\hat{G}$.

644. Soit $\varphi \in L_1(G, \mu)$ et $\varphi \geqslant 0$. Montrer que $\tilde{\varphi}$ est définie positive sur $\hat{G}$.

2. Séries de Fourier.

645°. Que peut-on dire des coefficients de Fourier d'une fonction f sur $\mathbf{T}$ si l'on sait que f est

a) paire : $f(t) = f(1-t)$,
b) impaire : $f(t) = -f(1-t)$,
c) presque partout réelle sur $\mathbf{T}$?

646°. Soit f une fonction sur $\mathbf{T}$ possédant une dérivée d'ordre k différentiable par morceaux. Pour quelle valeur maximale de l les coefficients de Fourier de f sont-ils justiciables de la majoration $|c_n| = o(|n|^{-l})$?

647. Montrer que l'image de l'espace $C^k(\mathbf{T})$ par la transformation de Fourier est contenue dans l'ensemble des suites telles que $|c_n| = o(|n|^{-k})$ et contient l'ensemble des suites telles que $|c_n| = o(n^{-k-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.

648. Soit $W^k(\mathbf{T})$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbf{T}$ dont les dérivées distributionnelles d'ordre k appartiennent à $L_2(\mathbf{T}, dt)$. Décrire cet espace en termes de coefficients de Fourier.

649. Montrer que la fonction $f(t) = \ln \sin \pi\{t\}$ appartient à $L_1(\mathbf{T}, dt)$ et trouver sa transformée de Fourier.

650. Exprimer en termes de coefficients de Fourier les propriétés suivantes de la fonction f :

a) $f\left(t+\frac{1}{2}\right) = f(t)$;

b) $f\left(t+\frac{1}{k}\right) = \lambda f(t)$; pour quelles valeurs de $k \in \mathbf{Z}$ existe-t-il des fonctions non nulles jouissant de cette propriété ?

651*. Une suite exacte $0 \to C_n \xrightarrow{i} \mathbf{T} \xrightarrow{p} \mathbf{T} \to 0$ est définie par l'injection $i : C_n \to \mathbf{T}$, où $i(k \bmod n) = e^{2\pi i k/n}$, et par la projection $p : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$, où $p(z) = z^n$. Décrire la suite exacte duale.

652. Soit f une fonction sommable sur l'intervalle $[0, 1/4]$. Comment faut-il prolonger f à l'intervalle $[0, 1]$ pour que ses coefficients de Fourier vérifient les relations $c_{2k} = 0$, $c_{2k-1} = -c_{1-2k}$.

653. Soit $\{c_n\}$ les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L_1(\mathbf{T}, dt)$. Trouver les coefficients de Fourier $\{c_n(h)\}$ de la fonction lissée (ou *fonction de Stéklov*) $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, d\xi$.

654*. Développer en série de Fourier la fonction $f(t_1, t_2) = \operatorname{sgn}(\{t_1\} - \{t_2\})$ sur $\mathbf{T}^2$, où $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire de t.

655. On demande les propriétés des suites $\{c_n\}$ des coefficients de Fourier :

a) de plynômes trigonométriques,
b) de polynômes de $\{t\}$,
c) de polynômes de $\{t-1/2\}$.

656*. Montrer qu'une fonction continue f sur $\mathbf{T}$ est définie positive

(voir exercice 641) si et seulement si ses coefficients de Fourier ne sont pas négatifs.

657. On dit qu'une suite $\{c_n\}$, $n \in \mathbf{Z}$, est *définie positive* si pour toute suite à support borné $\{z_n\}$, $n \in \mathbf{Z}$, on a $\sum_{n,m} c_{n-m} z_n \bar{z}_m \geqslant 0$.

Montrer qu'une suite définie positive est bornée et que $c_n = \bar{c}_{-n}$, $c_0 \geqslant |c_n|$, $|c_0 c_{m+n} - c_m c_n|^2 \leqslant (c_0^2 - |c_m|^2)(c_0^2 - |c_n|^2)$.

658*. Montrer que toute suite définie positive (voir exercice 657) est la transformée de Fourier d'une mesure borélienne finie μ sur $\mathbf{T}$: $c_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t}\, d\mu(t)$.

659. Soient U un opérateur unitaire dans un espace hilbertien H, $\xi \in H$. Montrer que la suite $c_n = (U^n \xi, \xi)$ est définie positive.

660. On se place dans les conditions de l'exercice 659 et on suppose de plus que ξ est un *vecteur cyclique* pour U (c'est-à-dire que l'enveloppe linéaire des vecteurs $U^n \xi$, $n \in \mathbf{Z}$, est dense dans H). Construire l'isomorphisme de H sur $L_2(\mathbf{T}, \mu)$ où μ est la transformée de Fourier de la suite $\{c_n\}$, qui envoie l'opérateur U dans la multiplication par $e^{2\pi i t}$.

661.** Soient f une fonction réelle différentiable par morceaux sur $\mathbf{T}$, $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k t}$ la somme partielle de sa série de Fourier, $\Gamma_n \subset \mathbf{T} \times \mathbf{R}$ le graphe de la fonction S_n. Trouver l'ensemble limite de $\{\Gamma_n\}$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points limites des suites $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n \in \Gamma_n$.

662. On demande le développement en série de Fourier des distributions suivantes :

a) $f(t) = \delta(t)$;

b) $f(t) = \operatorname{cotg} \pi t$.

663. Calculer la somme des séries de distributions suivantes :

a) $\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i n t}$;

b) $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|\, e^{2\pi i n t}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \pi n \{t\})/n$.

664. Montrer qu'une distribution sur $\mathbf{T}$ est définie de façon unique par ses coefficients de Fourier.

665. On dit qu'une distribution f sur $\mathbf{T}$ est *définie positive* si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{T})$ on a $\langle f, \varphi * \varphi^* \rangle \geqslant 0$. Caractériser les distributions définies positives en termes de coefficients de Fourier.

666. Soient α un nombre réel irrationnel, X un sous-ensemble mesurable de $\mathbf{T}$ invariant par une α-translation. Montrer que ou bien $\mu(X) = 0$ ou bien $\mu(X) = 1$. (Cette propriété de l'application d'un espace mesuré s'appelle *ergodicité* : on dit qu'une application est *ergodique* si tout sous-ensemble mesurable invariant soit est de mesure 0, soit possède un complémentaire de mesure nulle.)

667*. Intégrer par la méthode de Fourier l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur le cercle $\mathbf{T}$ avec la condition initiale $u(0, x) = V(x)$ (voir exercice 707).

3. Intégrale de Fourier.

668. On demande la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0$;
b) $f(x) = 1/(x^2+a^2)$;
c) $f(x) = \theta(x)e^{-ax}, \quad a > 0$;
d) $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$;
e)* $f(x) = 1/\mathrm{ch}\, ax$;
f)* $f(x) = x/\mathrm{sh}\, ax$;
g)* $f(x) = 1/\mathrm{ch}^2\, ax$;
h) $f(x) = (\sin ax \sin bx)/x^2$.

669. Soient $D_k = \partial/\partial x_k$, M_k l'opérateur de multiplication par $2\pi i x_k$. Considérons dans l'espace $S(\mathbf{R}^n)$ les opérateurs $A_k = iD_k + M_k$, $A_k^* = iD_k - M_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (en théorie quantique du champ ces *opérateurs* s'appellent *créateurs* et *annihilateurs*).

a) Montrer que les solutions des équations $A_k f = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$ forment un espace de dimension un dans $S(\mathbf{R}^n)$.

b)* Soit $f_0 \in S(\mathbf{R}^n)$ un vecteur de base dans l'espace des solutions du système $A_k f = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (le vecteur f_0 s'appelle le *vide*). Montrer que le système de fonctions $f_m = (A_1^*)^{m_1} \ldots (A_n^*)^{m_n} f_0$, $m \in \mathbf{N}^n$ est dense dans $S(\mathbf{R}^n)$.

c) Posons $N_k = \frac{1}{4\pi} A_k^* A_k$, $N = \sum_{k=1}^{n} N_k$ (les *opérateurs des nombres* de remplissage et du *nombre de particules*). Montrer que les fonctions f_m, $m \in \mathbf{Z}^n$, sont propres pour les opérateurs N_k et N et calculer les valeurs propres correspondantes.

d)* Construire l'isomorphisme de l'espace $S(\mathbf{R}^n)$ sur l'espace des suites n-uples $\{c_m\}$, $m \in \mathbf{N}^n$, telles que $|c_m| = o(|m|^{-k})$ pour tous les $k \in \mathbf{N}$.

e) Calculer la transformée de Fourier des fonctions f_m, $m \in \mathbf{N}^n$.

670. Montrer que tout opérateur continu dans l'espace $S(\mathbf{R}^n)$ commutant avec les opérateurs M_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ (voir exercice 669), est un opérateur de multiplication par une fonction.

671. Montrer que tout opérateur continu dans $S(\mathbf{R}^n)$ commutant avec les opérateurs M_k et D_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ (voir exercice 669), est scalaire.

672. Montrer que les transformations directe et inverse de Fourier laissent invariant l'espace $S(\mathbf{R}^n)$ et sont des applications continues inverses l'une de l'autre dans cet espace.

673. Soit $G(\mathbf{R}^{2n})$ l'espace isomorphe à $S(\mathbf{R}^n)$ en vertu de l'exercice 667. Quel opérateur de $G(\mathbf{R}^{2n})$ est associé à la transformation de Fourier dans $S(\mathbf{R}^{2n})$?

674°. On demande les transformées de Fourier des fonctions suivantes de $L_2(\mathbf{R}, dx)$, $a, b \in \mathbf{R}$:

a) $f(x) = 1/(x+\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$;

b) $f(x) = (\sin ax)/x$;
c) $f(x) = (\sin ax \sin bx)/x$;
d) $f(x) = x/(x^2+a^2)$;
e) $f(x) = (\operatorname{th} ax)/x$.

675°. Que peut-on dire de la transformée de Fourier d'une fonction f si l'on sait que f est

a) paire,
b) impaire,
c) réelle,
d) telle que $f(x) = \overline{f(-x)}$?

676. Des fonctions f et g sur $\mathbf{R}^n$ sont reliées par la relation $f(x) = g(Ax+b)$, où A est un opérateur linéaire inversible dans $\mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^n$. Comment sont reliées les transformées de Fourier $\tilde{f}(\lambda)$ et $\tilde{g}(\lambda)$?

677. Montrer que si $f \in L_1(\mathbf{R}^n, dx)$ et $\tilde{f}(\lambda) \equiv 0$, alors $f(x) = 0$ presque partout.

678. Soit $H_s(\mathbf{R}^n)$, $s \geqslant 0$, l'espace des transformées de Fourier de toutes les fonctions de $L_2(\mathbf{R}^n, (1+\|\lambda\|^{s/2})\,d\lambda)$. Montrer que pour $s > n/2$ toute fonction $f \in H_s(\mathbf{R}^n)$ est confondue presque partout avec une fonction continue bornée.

679. Prouver la continuité des opérateurs $D_k : H_s(\mathbf{R}^n) \to H_{s-1}(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $s \geqslant 1$ (voir exercices 669 et 678).

680°. Montrer que la convolée de deux fonctions de $S(\mathbf{R}^n)$ est aussi une fonction de $S(\mathbf{R}^n)$.

681. Montrer que la convolée des fonctions $f_1 \in H_{s_1}(\mathbf{R}^n)$ et $f_2 \in H_{s_2}(\mathbf{R}^n)$ (voir exercice 678) appartient à $BC^k(\mathbf{R}^n)$ si $s_1+s_2 \geqslant k$. $\Big($$BC^k(\mathbf{R}^n)$ est l'espace des fonctions sur $\mathbf{R}^n$ possédant des dérivées jusqu'à l'ordre k continues et bornées. La norme est définie sur cet espace par

$$\|f\| = \sup_{s \in \mathbf{R}^n,\, |l| \leqslant k} |f^{(l)}(x)|\Big).$$

682. Soit $\mathbf{P}$ un polynôme sur $\mathbf{R}$ de degré $2m$, ne possédant pas de racines réelles.

a) Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = 1/P(x)$ est indéfiniment différentiable partout sauf au point $\lambda = 0$.

b) Montrer que $\tilde{f}(\lambda)$ admet en $\lambda = 0$ des dérivées unilatérales de tout ordre.

c) Combien de dérivées supérieures de $\tilde{f}(\lambda)$ sont continues ?

683. Soit $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$ une fonction rationnelle. Montrer que $|\tilde{f}(\lambda)| \leqslant ce^{-\varepsilon|\lambda|}$, où c et ε sont des constantes positives et $\lambda \in \mathbf{R}$.

684. a) On sait que $f \in S(\mathbf{R})$ et $\int_{\mathbf{R}} x^n f(x)\,dx = 0$ pour tous les $n \in \mathbf{N}$. Peut-on en déduire que $f \equiv 0$?

b) On sait que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\int_{\mathbf{R}} x^n \varphi(x)\, dx = 0$ pour tous les $n \geqslant n_0$. Peut-on en déduire que $\varphi \equiv 0$?

685*. Montrer que toute fonction définie positive continue f sur la droite est de la forme $f(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i\lambda x}\, d\mu(\lambda)$, où μ est une mesure borélienne sur $\mathbf{R}$.

686. Soit $\{U(t)\}$, $t \in \mathbf{R}$ un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans un espace hilbertien H (c'est-à-dire que $U(t)\, U(s) = U(t+s)$), continue en t pour la topologie opératorielle forte. Montrer que la fonction $f(t) = (U(t)\xi, \xi)$ est définie positive pour tout vecteur $\xi \in H$.

687. On se place dans les conditions de l'exercice 686 et on suppose de plus que le vecteur ξ est cyclique pour $U(t)$ (c'est-à-dire que l'enveloppe linéaire des vecteurs $U(t)\xi$, $t \in \mathbf{R}$, est dense dans H). Construire l'isomorphisme de l'espace H sur $L_2(\mathbf{R}, \mu)$ qui fait correspondre à l'opérateur $U(t)$ l'opérateur de multiplication par $e^{2\pi i\lambda t}$.

688*. *Théorème de Paley-Wiener.* Montrer que les transformées de Fourier des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ forment l'espace des fonctions analytiques entières de $\lambda \in \mathbf{C}$ telles qu'il existe un nombre $a > 0$ et des constantes c_k telles que $|g(\lambda)|\,(1+|\lambda|)^k \leqslant c_k e^{a\,|\mathrm{Im}\,\lambda|}$.

689*. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ décroissant à l'infini comme $O\,(\|x\|^{-n})$. Alors pour toute sous-variété affine $L \subset \mathbf{R}^n$ de dimension $n-1$ la restriction de f à L est sommable sur L pour la mesure naturelle de Lebesgue μ_L sur L.

a) Montrer que si $\int_L f(x)\, d\mu_L(x) = 0$ pour tous les $L \subset \mathbf{R}^n$, alors $f(x) \equiv 0$.

b)** Exprimer $f(x)$ en fonction de $\varphi(L) = \int_L f(x)\, d\mu_L(x)$ pour $n = 3$.

690.** Trouver une fonction $f \in S(\mathbf{R}^3)$ si l'on connaît ses intégrales sur toutes les droites rencontrant une droite donnée $l \subset \mathbf{R}^3$.

4. Transformation de Fourier des distributions.

691°. On demande les transformées de Fourier des distributions suivantes sur la droite :

a) $f(x) \equiv 1$;
b) $f(x) = \delta^{(k)}(x)$;
c) $f(x) = \theta(x-a)$;
d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;
e) $f(x) = x^k$;
f) $f(x) = |x|^{2k+1}$;
g) $f(x) = x^{2k} \operatorname{sgn} x$.

692. Trouver la transformée de Fourier de la distribution $f(x) = \cos ax^2$, $a \in \mathbf{R}$.

693. Trouver la transformée de Fourier des distributions :

a) $f(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x}$ (voir exercice 484) ;

b) $f(x) = \frac{1}{x+i0}$ (voir exercice 499).

694. Trouver la solution générale de l'équation $x^n f(x) = 0$ sur $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

695. Trouver la solution générale de l'équation $x^n f^{(k)}(x) = 0$ a) sur $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, b) sur $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$.

696. Trouver la transformée de Fourier de la distribution

$$f_{\pm}(x) = \frac{1}{x^2-r^2\pm i0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x^2-r^2\pm i\varepsilon^2}.$$

697. Trouver la transformée de Fourier de la distribution $f(x) = |x^2-a^2|$, $a \in \mathbf{R}$.

698. Trouver la transformée de Fourier des distributions

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin ax)$;

b) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos ax)$;

c) $f(x) = |\sin ax|$.

699. Soit f une distribution homogène de degré (λ, ε). Montrer que $\tilde{f}$ est également homogène et trouver son degré.

700*. Calculer la transformée de Fourier de la distribution $f_\alpha(x) = x_+^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$ (voir exercice 502).

701°. Soient f une distribution régulière sur un cercle $\mathbf{T}$, F une distribution périodique sur la droite, liée à f par la relation $\langle F, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}} f(e^{2\pi i t})\varphi(t)\,dt$.

Etablir une relation entre les transformées de Fourier de F et de f.

702*. On dira qu'une fonction continue f sur $\mathbf{R}^n$ est *quasi périodique* de période R si son intégrale étendue à une boule de rayon R ne dépend pas de la position du centre de cette boule.

a) Montrer que pour $n = 1$ il y a identité entre la quasi-périodicité et la périodicité ordinaire.

b) Construire une fonction quasi périodique non constante sur le plan.

c) Une fonction quasi périodique non constante peut-elle avoir deux périodes différentes R_1 et R_2 ?

703*. On demande la transformée de Fourier de la distribution $f(x) = e^{-\pi(Ax, x)}$ dans $\mathbf{R}^n$, où A est une matrice symétrique dont la partie réelle est définie positive.

704*. On demande la transformée de Fourier de la distribution $f(x) = e^{i\pi(Ax, x)}$ dans $\mathbf{R}^n$, où A est une matrice réelle symétrique non dégénérée.

705. Montrer que l'image de l'espace $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ par la transformation de Fourier est l'ensemble des fonctions analytiques entières $g(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, telles que

$$|g(\lambda)| < C\,|1+|\lambda||^N e^{R\cdot|\operatorname{Im}\lambda|},$$

où C, N, R sont des constantes (qui ne sont pas les mêmes pour chaque

fonction g). De quelles propriétés de la transformée dépendent les constantes R et N ?

706. Montrer que l'équation $\Delta f = f$ ne possède pas de solutions non triviales sur l'espace $S'(\mathbf{R}^n)$. $\left(\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right.$ est le *laplacien*$\left.\right)$.

707*. Soit $u(t, x)$ la solution de *l'équation de la chaleur* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vérifiant la condition initiale $u(0, x) = v(x)$, $v \in L_1(\mathbf{R}, dx)$. Montrer que $u(t, x)$ est de la forme $v * f_t(x)$ et trouver la fonction f_t.

708. Soient $T(a)$ l'opérateur de translation d'un vecteur $a \in \mathbf{R}^n$, $M(a)$ l'opérateur de multiplication par $2\pi i a x$ dans l'espace $S'(\mathbf{R}^n)$. Déduire les relations de commutation

$$\mathcal{F}T(a)\mathcal{F}^{-1} = M(a), \quad \mathcal{F}M(a)\mathcal{F}^{-1} = T(-a),$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier.

709. Calculer les sommes suivantes à l'aide de la formule de Poisson :

$$\text{a)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{n^2+a^2}\,; \qquad \text{b)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(a+n)^2}\,; \qquad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,.$$

710. On demande la transformée de Fourier des distributions sur $\mathbf{R}^n$:

a) $\delta(\|x\|^2 - r^2)$, b) $\theta(r^2 - \|x\|^2)$.

711*. Soit $f \in S'(\mathbf{R}^3)$ une distribution régulière ne dépendant que du rayon $r = \|x\|$, $f(x) = \varphi(\|x\|)$. Montrer que sa transformée de Fourier est définie par la formule

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} k(r\,\|\lambda\|)\,\varphi(r)\,dr,$$

et trouver la fonction k.

712. Montrer l'identité $\mathcal{F}[\theta(x)] = \pi\delta(\lambda) + i\mathcal{P}\frac{1}{\lambda}$.

713. On demande la transformée de Fourier de la distribution $\mathcal{P}\frac{1}{x^3}$ (voir exercice 484c)).

CHAPITRE 5

THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS

§ 1. Calcul fonctionnel

1. Fonctions opératorielles dans un espace de dimension finie.

714°. Soit A un opérateur dans un espace L de dimension n sur K. Montrer que les opérateurs $1, A, A^2, \ldots, A^n$ sont linéairement dépendants.

715. Montrer que les propriétés suivantes d'un opérateur A dans un espace L de dimension n sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ sont équivalentes entre elles :

a) les opérateurs $1, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ sont linéairement indépendants ;

b) il existe un vecteur $\xi \in L$, tel que $\xi, A\xi, \ldots, A^{n-1}\xi$ est une base de L ;

c) il existe un vecteur $\xi \in L$ *cyclique* pour A (c'est-à-dire tel que tout sous-espace de L contenant ξ et invariant par A est confondu avec L).

Les opérateurs A possédant les propriétés indiquées sont dits *réguliers*.

716. Montrer qu'une matrice diagonale définit un opérateur régulier si et seulement si tous les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

717. Montrer que les propriétés suivantes d'une matrice A sont équivalentes :

a) A définit un opérateur régulier ;

b) le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A sont confondus ;

c) à toute valeur propre de A correspond un bloc de Jordan et un seul.

718. Montrer que l'ensemble des opérateurs réguliers est ouvert et partout dense dans l'ensemble de tous les opérateurs.

719. Soit R_n l'ensemble des matrices d'ordre n de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que

a) tout opérateur régulier dans un espace de dimension n est défini par une matrice $A \in R_n$ dans une base convenable ;

b) toute matrice $A \in R_n$ définit un opérateur régulier ;

c) deux matrices A et B de R_n sont *semblables* (c'est-à-dire $A = CBC^{-1}$) si seulement $A = B$.

720. Montrer que deux opérateurs réguliers A et B dans un espace L de dimension n sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ sont semblables si et seulement si

$$\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

721°. Soit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

une *matrice de Jordan* d'ordre n associée à la valeur propre λ. Calculer les matrices :

a) A^n, $n = 2, 3$;

b) $p(A)$, où p est un polynôme ;

c) $f(A)$, où f est une fonction analytique entière ;

d) $r(A)$, où r est une fonction rationnelle ne présentant pas de pôle en λ.

722. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre unitaire sur le corps $K = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$. On dit qu'un élément $x \in \mathfrak{A}$ est *idempotent* si $x^2 = x$. On appelle *somme directe* des algèbres $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ l'espace vectoriel $\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$ muni de la multiplication sur les composantes. Montrer que les propriétés suivantes de l'algèbre $\mathfrak{A}$ sont équivalentes :

a) $\mathfrak{A}$ est isomorphe à la somme directe de certaines algèbres $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ (non nulles).

b) l'algèbre $\mathfrak{A}$ contient un élément idempotent non trivial (différent de 0 et de 1).

De telles algèbres sont dites *primaires*.

723. a) Montrer que le corps $\mathbf{C}$ est une algèbre primaire sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que toute algèbre unitaire primaire munie d'un générateur sur $\mathbf{C}$ est isomorphe à l'une des algèbres $\mathfrak{A}_n = \mathbf{C}[x]/(x^n)$ (l'algèbre quotient des polynômes de x par l'idéal engendré par x^n).

724. Montrer que toute algèbre de dimension finie est la somme directe d'algèbres primaires.

725°. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres telle que $0 \leqslant a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour tous les m et n. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n/n)$ existe et vaut $\inf\limits_n (a_n/n)$.

726. Soit A un opérateur dans un espace vectoriel L de dimension n sur K. Désignons par $\mathfrak{A}(A)$ l'algèbre sur K engendrée par 1 (l'opérateur unité) et A. Montrer que $\dim \mathfrak{A}(A) \leqslant n$.

727. Soit $K = \mathbf{C}$. Montrer que l'algèbre $\mathfrak{A}(A)$ est primaire si et seulement si l'opérateur A possède une seule valeur propre.

728. Soit S un ensemble d'opérateurs dans un espace vectoriel L. Par $S^!$ on désigne l'ensemble des opérateurs de L commutant avec tous les opérateurs de S. Pour quels opérateurs A a-t-on $\mathfrak{A}(A)^! = \mathfrak{A}(A)$?

729°. Montrer que tout polynôme des coefficients d'une matrice A, invariant par les similitudes $A \mapsto CAC^{-1}$ est un polynôme de $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} A^2, \ldots, \operatorname{tr} A^n$.

730*. Soient A et B des matrices d'ordre deux. Montrer que tout polynôme des coefficients de A et de B, invariant par les transformations $A \to CAC^{-1}$, $B \to CBC^{-1}$ est de la forme $P(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} A^2, \operatorname{tr} B^2, \operatorname{tr} AB)$, où P est un polynôme de cinq variables défini de façon unique.

731.** Soient A et B des matrices d'ordre n. Montrer que l'algèbre des polynômes des coefficients de A et de B, invariants par les transformations $A \to CAC^{-1}$, $B \to CBC^{-1}$, contient au moins n^2+1 générateurs.

732. Indiquer dans l'espace des matrices d'ordre $2n \times 2n$ le sous-espace de dimension $1+n^2$ composé des matrices commutant deux à deux.

733. Soit A un opérateur dans un espace de dimension n possédant une seule valeur propre λ. Montrer que pour toute fonction f différentiable $n-1$ fois au point λ, on a $f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(A-\lambda \cdot 1)^k$.

734*. Soit A un opérateur dans un espace de dimension n possédant des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinctes. Montrer que

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \prod_{j \neq k} \frac{A-\lambda_j \cdot 1}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

735*. Soit A un opérateur possédant des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de multiplicités $m_1, \ldots, m_n$. Prouver la formule

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_{k-1}} f^{(j)}(\lambda_k) B_{jk}$$

et expliciter les opérateurs B_{jk}.

736*. Soit K l'ensemble de tous les opérateurs positifs (voir exercice 747) de trace 1 dans un espace hilbertien H de dimension finie. Montrer que K est un compact convexe et trouver ses points extrêmes.

2. Fonctions d'opérateur auto-adjoint borné.

737°. Soit A un opérateur de multiplication par une fonction réelle continue $a(x)$ dans l'espace $L_2(]0, 1[)$. Montrer que A est un opérateur auto-adjoint et calculer $\sigma(A)$.

738°. Trouver le spectre de l'opérateur A de $L_2(]0, 1[)$ défini par $Af(x) = a(x) f(x)$, où $a \in L_\infty(]0, 1[)$.

739°. Soit $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$. Trouver le spectre de l'opérateur de convolution $S(f)$ dans l'espace $L_2(\mathbf{R}, dx)$.

740°. Soit $f \in L_1(\mathbf{T}, dt)$. Trouver le spectre de l'opérateur de convolution de f dans l'espace $L_2(\mathbf{T}, dt)$.

741°. Montrer que le spectre d'un opérateur unitaire U est situé sur le cercle unité.

742°. Soit A un opérateur auto-adjoint. Montrer que l'opérateur $(A+\lambda 1)(A+\bar{\lambda} 1)^{-1}$ est unitaire pour les λ non réels.

743°. Montrer qu'un opérateur A est auto-adjoint sachant que l'opérateur $(A-i1)$ est inversible et l'opérateur $(A+i1)(A-i1)^{-1}$ unitaire.

744°. Montrer que l'opérateur $A = i(U+1)(U-1)^{-1}$ est auto-adjoint sachant que l'opérateur U est unitaire et $U-1$ inversible.

745. Calculer le rayon spectral de l'*opérateur de Volterra* A dans $L_2(]0, 1[)$ défini par la formule

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

746. Calculer la résolvante de l'opérateur de Volterra (de l'exercice 745).

747°. On dit qu'un opérateur A d'un espace hilbertien H est *positif* si $(Ax, x) \geqslant 0$ pour tous les $x \in H$, $x \neq 0$. On écrira alors $A \gg 0$. Montrer que pour un opérateur positif A on a

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

748*. Soient A un opérateur auto-adjoint tel que $a \cdot 1 \ll A \ll b \cdot 1$, $p(x)$ un polynôme non négatif sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que $p(A) \gg 0$.

749. Montrer que l'application $p \mapsto p(A)$ est continue pour la norme de $C[a, b]$ si $a \cdot 1 \ll A \ll b \cdot 1$.

750. Soit A un opérateur auto-adjoint borné. Montrer que l'opérateur $U(t) = e^{itA}$, $\forall t \in \mathbf{R}$, est un opérateur unitaire et que

$$U(t)\,U(s) = U(t+s), \qquad U(t)^* = U(-t).$$

751. Montrer que dans les conditions de l'exercice 750 la fonction opératorielle $U(t)$ est différentiable et $U'(t) = iAU(t) = iU(t)A$.

752*. Montrer que toute fonction opératorielle $U(t)$ continue pour la topologie de la norme et vérifiant l'équation fonctionnelle $U(t)\,U(s) = U(t+s)$, $U(t)^* = U(-t)$ est de la forme indiquée dans l'exercice 750.

753°. Trouver la décomposition polaire de l'opérateur A de multiplication par une fonction $a \in L_\infty(X, \mu)$ dans l'espace $L_2(X, \mu)$.

754. Trouver la décomposition polaire d'un opérateur de translation unilatérale dans $l_2(\mathbf{C})$.

755. Soient A et B des opérateurs commutables, $A = RU$ la décomposition polaire de A.

a) Montrer que R et U commutent avec B si B est un opérateur unitaire.

b) Ceci est-il vrai dans le cas général ?

756. Supposons que $A \gg B \gg 0$ et que B est inversible. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} \ll B^{-1}$.

757*. Soit T un opérateur de translation dans $l_2(\mathbf{Z})$ $(T\{x_n\} = \{x_{n+1}\})$. Montrer qu'il existe un opérateur auto-adjoint unique tel que

1) $T = e^{iA}$;

2) $\|A\| \leqslant \pi$.

758. Soient H_1 et H_2 des sous-espaces de H, P_1 et P_2 les orthoprojecteurs

correspondants. Montrer que $\lim_{n\to\infty} (P_1P_2)^n$ existe et est égale à l'orthoprojecteur sur $H_1 \cap H_2$.

759. Soit A l'opérateur de $L_2(]0, \infty[, dx)$ défini par la formule $Af(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\, dy$. Montrer que A commute avec l'opérateur de dilatation $L(a)$: $f(x) \mapsto f(ax)$.

3. Opérateurs auto-adjoints non bornés.

760°. Dans les notations du théorème 7 du chapitre V montrer que $\tau(\Gamma_A)^\perp$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si D_A est dense dans H.

761°. Soient A et A^* sont densement définis, c'est-à-dire tels que D_A et D_{A^*} sont denses dans H. Montrer que $(A^*)^*$ est confondu avec la fermeture de A.

762°. Soit A l'opérateur d/dx de $L_2(\mathbf{R}, dx)$ défini sur

a) $D_A = \mathcal{D}(\mathbf{R})$;

b) $D_A = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})\ ;\ \varphi(0) = 0\}$;

c) $D_A = \{\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})\ ;\ \varphi \in L_2(\mathbf{R}, dx),\ \varphi' \in L_2(\mathbf{R}, dx)\}$ dit *domaine naturel de définition*. Trouver A^* et D_{A^*}.

763°. Soit $A = d/dx$ un opérateur de $L_2(]0, \infty[, dx)$ défini sur :

a) $D_A = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}),\ \operatorname{supp}\varphi \subset]0, \infty[\}$;

b) $D_A = \{\varphi \in \mathcal{E}(]0, \infty[,\ \varphi \in L_2(]0, \infty[),\ \varphi' \in L_2(]0, \infty[)\}$. Trouver A^* et D_{A^*}.

764°. Montrer que A essentiellement auto-adjoint est équivalent à chacune des conditions suivantes :

a) A^* est auto-adjoint ;

b) $\bar{A} = A^*$.

765°. Dans quels cas l'opérateur $A = id/dx$ dans l'espace $H = L_2(]0, 1[)$ est-il symétrique, essentiellement auto-adjoint, auto-adjoint :

a) $D_A = C^1[0, 1]$.

b) $D_A = \{\varphi \in C^1[0, 1],\ \varphi(0) = \varphi(1)\}$,

c) $D_A = \{\varphi \in C^1[0, 1],\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$?

766. L'opérateur $A = id/dx$ de $L_2(]0, 1[)$ est défini sur un domaine $D_A \subset C^1[0, 1]$ défini par la condition aux limites $\varphi(0) = \lambda\varphi(1)$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

a) Trouver A^* et D_{A^*}.

b) Pour quels λ l'opérateur A est-il essentiellement auto-adjoint ?

767°. Le laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ sur $L^2(\mathbf{R}^2, dx)$ sera-t-il symétrique si

a) $D_\Delta = S(\mathbf{R}^2)$; b) $D_\Delta = \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$;

c) D_Δ est le domaine naturel de définition.

768*. Montrer que tout opérateur symétrique A tel que $D_A = A$ est borné.

769. Soit A un opérateur auto-adjoint.

a) Montrer que l'opérateur $(A+i1)(A-i1)^{-1} = U$ est unitaire.

b) Montrer que $\ker(U-1) = \{0\}$.

770. Soit U un opérateur unitaire tel que $\ker(U-1) = \{0\}$. Montrer que

l'opérateur $A = i(U+1)(U-1)^{-1}$ défini sur $D_A = \operatorname{im}(U-1)$ est auto-adjoint.

771*. Calculer l'opérateur A dans les conditions de l'exercice 770 si U est un opérateur de 1-translation dans $l_2(\mathbf{Z})$.

772. Soient $H = l_2(\mathbf{C})$, D_A l'ensemble de toutes les suites à support borné de somme nulle, A un opérateur défini par la matrice $A = ||a_{jk}||$, où $a_{jk} = i \operatorname{sgn}(j-k)$.

a) A sera-t-il symétrique ?

b) A sera-t-il essentiellement auto-adjoint ?

773. Soient A_i, $i = 1, 2$ des opérateurs de multiplication par x dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$ définis sur D_{A_i}. L'intersection des sous-espaces D_{A_1} et D_{A_2} peut-elle être composée que de 0 si A_1 et A_2 sont essentiellement auto-adjoints ?

774. Soit A un opérateur densement défini et positif (voir exercice 747). Montrer qu'il y a équivalence entre A essentiellement auto-adjoint et $\ker(A^*+1) = 0$.

775*. Montrer que pour tout opérateur A densement défini fermé l'opérateur $T = A^*A+1$ défini sur $D_T = \{x \in D_A \,;\, Ax \in D_{A^*}\}$ est auto-adjoint.

776*. Soient H_1 et H_2 des espaces hilbertiens, $H_1 \otimes H_2$ leur produit tensoriel hilbertien. Montrer que si des opérateurs A_1 et A_2 sont auto-adjoints dans H_1 et H_2 respectivement, alors l'opérateur $A_1 \otimes 1 + 1 \otimes A_2$ défini sur $D_{A_1} \otimes D_{A_2}$ est essentiellement auto-adjoint dans H.

777°. Montrer que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est situé sur la droite réelle.

778°. a) Prouver la relation $(\operatorname{im} A)^{\perp} = \ker A^*$ pour un opérateur densement défini A sur un espace hilbertien.

b) Dans ce cas, que peut-on dire de la relation $(\ker A)^{\perp} = \overline{\operatorname{im} A^*}$?

779. Montrer qu'un opérateur auto-adjoint A ne possède pas d'extensions symétriques distinctes de A.

780. Soit A un opérateur symétrique. Montrer que l'opérateur $(A+i) \times (A-i)^{-1}$ se prolonge en l'opérateur isométrique U de $\overline{\operatorname{im}(A-i)}$ dans $\overline{\operatorname{im}(A+i)}$.

781. Soit A un opérateur symétrique fermé. Montrer que l'espace $\operatorname{im}(A+i1)$ est fermé dans H.

782. Montrer qu'un opérateur symétrique fermé A admet une extension auto-adjointe si et senlement si $\dim\ker(A^*-i1) = \dim\ker(A^*+i1)$.

§ 2. Décomposition spectrale des opérateurs

1. Réduction d'un opérateurs à la multiplication par une fonction.

783°. Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de dimension finie. Réduire cet opérateur à la multiplication par une fonction.

784°. Soient $H = L_2[-1, 1]$, A, un opérateur de multiplication par une fonction $a(x) = x$. Indiquer les fonctions qui sont vecteurs cycliques pour l'opérateur A de H :

a) $f(x) = 1$; b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; c) $f(x) = \theta(x)$.

785. Soit dans l'espace $H = L_2[-1, 1]$ un opérateur A de multiplication par une fonction $a(x) = x^2$. Montrer que

a) H ne contient pas de vecteurs cycliques pour A ;

b) représenter H par la rénunion de deux sous-espaces contenant des vecteurs cycliques pour A.

786. Montrer que si A est un opérateur à spectre simple dans un espace hilbertien H de dimension infinie, alors les opérateurs $1, A, A^2, \ldots, A^n$ sont linéairement indépendants.

787*. Soient B et C des opérateurs auto-adjoints bornés commutant entre eux. Montrer qu'il existe un opérateur auto-adjoint borné A tel que B et C soient des fonctions de A.

788. Soit A un opérateur auto-adjoint à spectre simple. Montrer que tout opérateur borné B commutant avec A est une fonction de A.

789. Montrer que $\|f(A)\| = \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$ pour toute fonction borélienne d'un opérateur auto-adjoint A.

790. Lesquels des opérateurs suivants sont à spectre simple :

a) la multiplication par x^2 dans l'espace $L_2(]0, 1[)$;

b) la multiplication par x^2 dans l'espace $L_2(]-1, 1[)$;

c) la multiplication par x^2 dans l'espace $L_2([0, 1]\times[0, 1])$.

791. Réduire l'opérateur de convolution $S(f)$, $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$ à un opérateur de multiplication par une fonction. Pour quelles fonctions cet opérateur est-il auto-adjoint ?

792. L'opérateur de convolution $S(f)$, $f \in L_1(\mathbf{R}, dx)$, peut-il être unitaire ?

793*. Soit G un groupe commutatif localement compact muni d'une mesure invariante μ. Quelles conditions doit remplir la fonction $f \in L_1(G, \mu)$ pour que l'opérateur de convolution $S(f)$ soit :

a) auto-adjoint ;

b) unitaire ;

c) compact ?

794. Soit A un opérateur intégral dans $L_2(]0, 1[)$ défini par la formule $Af(x) = \int\limits_0^1 \min(x, y) f(y)\, dy$. Réduire cet opérateur à un opérateur de multiplication par une fonction.

795. Soit A un opérateur de $l_2(\mathbf{Z})$ défini par $(Ac)_n = c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}$. Réduire cet opérateur à une multiplication par une fonction et trouver son spectre.

796. Réduire l'opérateur non borné $A = i\, d/dx$ dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$ de domaine naturel de définition à une multiplication par une fonction.

797. Soient A un opérateur auto-adjoint non borné dans H, Γ_A le graphe de A dans $H \oplus H$. Montrer que l'orthocomplément de Γ_A dans $H \oplus H$ est $\tau(\Gamma_A)$.

798. Dans les conditions de l'exercice 797 désignons la projection du vecteur $x \oplus 0$ sur Γ_A et sur $\Gamma_A^{\perp}$ respectivement par $(y \oplus Ay)$ et $Az \oplus z$. Montrer que

a) les correspondances $x \mapsto y$ et $x \mapsto z$ sont des opérateurs bornés dans H ; désignons-les par B et C respectivement ;

b) $C = -AB, \quad (1+A^2)B = 1.$

799. Supposons qu'un opérateur A dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$ est confondu avec id/dx sur le domaine de définition naturelle $D_A = \{\varphi \in L_2(\mathbf{R}, dx),\ \varphi' \in L_2(\mathbf{R}, dx)\}$. Expliciter $f(A)$ si

a) $f(t) = e^{iat}, \qquad a \in \mathbf{R}$;

b) $f(t) = \dfrac{\sin at}{a}, \qquad a \in \mathbf{R}$;

c) $f(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}, \qquad A \in \mathbf{R}.$

800. Expliciter l'opérateur $f(A)$ si $f(t) = e^{at^2}$, $a > 0$, $A = d/dx$ dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$ de domaine de définition naturelle $D_A = \{\varphi \in L^2(\mathbf{R}, dx),\ \varphi' \in L^2(\mathbf{R}, dx)\}$.

801. Montrer que l'opérateur aux différences finies $\Delta_h\varphi(x) \equiv \equiv \dfrac{1}{h}[\varphi(x+h)-\varphi(x)]$ est une fonction de l'opérateur de différentiation.

802. Réduire à une multiplication par une fonction l'opérateur A dans $L_2(]0, \infty[, dx)$ défini par $Af(x) = \int\limits_0^\infty \dfrac{f(y)}{x+y}\, dy$ (comparer avec l'exercice 759) et trouver son spectre.

803*. Réduire à une multiplication par une fonction l'opérateur A_R dans $L_2(\mathbf{R}^2)$ défini par

$$A_R f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x+R\cos\varphi,\ y+R\sin\varphi)\, d\varphi.$$

804. Réduire à une multiplication par une fonction l'opérateur A_R de $L_2(\mathbf{R}^3)$ défini par

$$A_R f(y) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S_R} f(x+y)\, d\sigma(y),$$

où $d\sigma(y)$ est l'élément de surface d'une sphère S_R de rayon R centére en l'origine des coordonnées.

805*. Soit f une fonction continue sur un cercle. Expliciter l'opérateur $f(F)$ où F est l'opérateur de Fourier : $F\varphi(y) = \int\limits_R e^{-2\pi ixy}\varphi(y)\, dy$.

2. Théorème spectral.

806. Soient λ une mesure projective sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\operatorname{End} H$, f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour toute partition $T = = \{a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b\}$ et tout ensemble de points $\xi = \{\xi_k\}$, $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, définissons la *somme intégrale de Riemann*

$$S(f, T, \xi) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\, \lambda([t_k, t_{k+1}]).$$

a) Montrer que les sommes intégrales $S(f, T, \xi)$ convergent en norme vers un opérateur lorsque le diamètre de la partition $\delta(T) = \max_k (t_{k+1} - t_k)$ tend vers 0. Cet opérateur s'appelle *intégrale de Riemann* de f par rapport à la mesure λ et se note

$$R\int_a^b f(x)\,d\lambda(x).$$

b) Montrer que l'intégrale de Riemann $R\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)$ est confondue avec l'intégrale de Lebesgue $\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)$ définie au n° 2 § 2 chap. V.

807°. Démontrer les propriétés suivantes de l'intégrale de fonctions bornées par rapport à une mesure projective :

a) $\int_X [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]\,d\lambda(x) = \alpha_1 \int_X f_1(x)\,d\lambda(x) + \alpha_2 \int_X f_2(x)\,d\lambda(x)$;

b) $\int_X (f_1 f_2)(x)\,d\lambda(x) = \int_X f_1(x)\,d\lambda(x) \int_X f_2(x)\,d\lambda(x)$;

c) $\left\| \int_X f(x)\,d\lambda(x) \right\| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)|$;

d) $\left(\int_X f(x)\,d\lambda(x) \right)^* = \int_X \overline{f(x)}\,d\lambda(x)$;

e) si $f_n(x) \to f(x)$, $|f_n(x)| \leqslant C$, $\forall x \in X$, alors $\int_X f_n(x)\,d\lambda(x) \to$ $\to \int_X f(x)\,d\lambda(x)$ fortement.

808. a) Montrer que dans la définition d'une mesure projective la propriété 3) peut être remplacée par la condition plus faible 3') $\lambda(X \backslash E) = 1 - \lambda(E)$ et par la condition de normalisation $\lambda(\varnothing) = 0$.

b) Montrer que dans la définition d'une mesure projective la condition 2) résulte de la condition 3), des conditions de normalisation $\lambda(\varnothing) = 0$, $\lambda(X) = 1$ et du fait que les valeurs de la mesure λ sont des orthoprojecteurs.

809. Soient $H_1 = L_2[0, 1]$, $H_2 = L_2([0, 1] \times [0, 1])$. Définissons des mesures projectives λ_1 et λ_2 sur End H_1 et End H_2 respectivement en posant $\lambda_i(E) = M(\chi_E(x))$. Existe-t-il un isomorphisme U: $H_1 \mapsto H_2$ associant λ_2 à λ_1 ?

810. Soient donnés un ensemble X muni d'une σ-algèbre B, un espace hilbertien H et pour tout $\xi \in H$ une mesure finie sur (X, B), tels que

1) $\mu_\xi(X) = ||\xi||^2$;

2) $\mu_{\xi-\eta} + \mu_{\xi+\eta} = 2\mu_\xi + 2\mu_\eta$.

Existe-t-il une mesure projective λ sur X à valeurs dans End H telle que $\mu_\xi = \lambda_\xi$ pour tous les $\xi \in H$?

811*. Soient X un compact métrique, H, un espace hilbertien. On appelle

représentation de l'algèbre $C(x)$ dans H une application $\varphi : C(X) \to \operatorname{End} H$ telle que

1) φ soit un homomorphisme d'algèbres ;

2) $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$;

3) $\varphi(1) = 1$ (l'unité à gauche est une fonction sur X, l'unité à droite, l'opérateur unité de H).

Montrer qu'il existe une mesure projective unique λ sur X à valeurs dans End H telle que $\varphi(f) = \int_X f(x)\, d\lambda(x)$.

812. Soient A un opérateur auto-adjoint dans un espace hilbertien H, λ sa mesure spectrale, E un borélien de la droite. Désignons par H_E le sous-espace $\lambda(E)H$. Montrer que

a) H_E est invariant par A ;

b) si E est borné, alors $A\big|_{H_E}$ est un opérateur borné ;

c) si E est fermé, alors $\sigma\left(A\big|_{H_E}\right) \subset E$.

813. Montrer que le spectre d'un opérateur auto-adjoint A est composé exactement des points $a \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[) \neq 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. (λ est la mesure spectrale de l'opérateur A.)

814. *Critère de Weyl.* Montrer qu'un point a appartient au spectre d'un opérateur auto-adjoint borné A dans un espace hilbertien H si et seulement s'il existe une suite de vecteurs unitaires $\xi_n \in H$ pour laquelle $\|A\xi_n - a\xi_n\| \to 0$ pour $n \to \infty$.

815. La définition du *spectre essentiel* d'un opérateur auto-adjoint borné A se déduit à partir du critère de Weyl (voir exercice 814) assorti d'une condition subsidiaire : l'orthonormalisation de la suite $\{\xi_n\}$. Montrer que si un opérateur B est autoadjoint et compact, alors les spectres essentiels de A et $A+B$ sont confondus.

816. *Formule de Stone.* Soit A un opérateur auto-adjoint borné. Montrer que

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_a^b [(a-\lambda)^2+\varepsilon^2]^{-1}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda(\{a\}) + \lambda((a, b)) + \frac{1}{2}\lambda(\{b\}) = \frac{1}{2}\lambda([a, b]) + \frac{1}{2}\lambda((a, b)).$$

817. Soit U un opérateur unitaire dans un espace hilbertien H. Montrer qu'il existe une mesure projective borélienne unique λ sur le cercle $\mathbf{T}$, à valeurs dans End H, telle que

$$f(U) = \int_0^1 f(e^{2\pi i t})\, d\lambda(t)$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur $\mathbf{T}$.

818. *Théorème ergodique de von Neumann.* Soit U un opérateur unitaire dans un espace hilbertien H. Montrer que $s\text{-}\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} U^k$ existe et est égale au projecteur sur ker $(U-1)$.

819. Soient A un opérateur borné, f une fonction analytique dans un domaine Ω contenant $\sigma(A)$. Définissons l'opérateur $f(A)$ par

$$f(A) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_C f(\lambda)(A-\lambda 1)^{-1}\,d\lambda,$$

où C est un contour quelconque dans Ω englobant $\sigma(A)$.

a) Montrer que la correspondance $f \mapsto f(A)$ est un homomorphisme d'algèbres.

b) Montrer que pour un opérateur normal A cette définition de $f(A)$ est confondue avec celle du n° 2, § 1, chap. V.

820*. Montrer que toute famille d'opérateurs auto-adjoints bornés commutant deux à deux dans un espace hilbertien séparable peut être réduite à la multiplication par une fonction dans une même base.

821*. Soient A un opérateur auto-adjoint dans un espace hilbertien H, λ sa mesure spectrale, f une fonction borélienne sur R. Définissons $f(A)$ par la formule

$$(f(A)\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\lambda_{\xi\eta}(x)$$

sur le sous-espace $D_A \subset H$ composé des vecteurs $\xi \in H$ tels que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,d\lambda_\xi(x) < \infty$. Montrer que

a) l'opérateur $B = f(A)$ est fermé et densement défini ;

b) les opérateurs BB^* et B^*B possèdent le même domaine de définition dense et sont confondus sur ce domaine.

822. Expliciter la mesure spectrale de l'opérateur $A = id/dx$ dans $L_2(\mathbf{R}, dx)$ de domaine de définition naturelle

$$D_A = \{\varphi \in L_2(\mathbf{R}, dx) : \varphi' \in L_2(\mathbf{R}, dx)\}.$$

823. Expliciter la mesure spectrale de l'extension auto-adjointe de l'opérateur $A = \frac{d^2}{dx^2}$ dans $D_A = \mathcal{D}(\mathbf{R}) \subset L_2(\mathbf{R}, dx)$.

824*. Expliciter la mesure spectrale de l'extension auto-adjointe de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ dans $D_A = S(\mathbf{R}^2) \subset L_2(\mathbf{R}^2, dx)$.

825°. Déterminer l'opérateur A dans la représentation $V(t) = e^{itA}$ d'un groupe à un paramètre dans l'espace $L_2(\mathbf{R}, dx)$, défini par $V(t)f(\tau) = V(t+\tau)$.

826. Soit $U(t)$ un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans un espace hilbertien H, tel que $U(1) = 1$. Montrer que $U(t) = e^{itA}$, où $\sigma(A) \subset \mathbf{Z}$.

827. Existe-t-il pour tout opérateur unitaire U un groupe à un paramètre $V(t)$ tel que $V(1) = U$?

828*. Trouver la décomposition spectrale de l'extension auto-adjointe de l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ défini initialement sur $D(A) = S(\mathbf{R})$.

TROISIÈME PARTIE

INDICATIONS

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES ENSEMBLES ET DE TOPOLOGIE

§ 1. Relations. Axiome de choix et lemme de Zorn

1. Réponse : a), b), e) sont des relations d'équivalence, c) et d) ne le sont pas.

2. Il faut reformuler la définition de la sorte : f_1 et f_2 sont équivalentes s'il existe des nombres positifs a, b et ε tels que $a < f_1(x)/f_2(x) < b$ pour $0 < x < \varepsilon$. Il s'ensuit que c'est une relation d'équivalence. La non-dénombrabilité de l'ensemble quotient résulte de ce que toutes les fonctions x^α pour $\alpha \geqslant 0$ ne sont pas deux à deux équivalentes.

3. Soient f_1, f_2, f_3 une suite de fonctions positives. Définissons les fonctions $\underline{f}$ et $\bar{f}$ en posant $\underline{f}(x) = \dfrac{1}{k} \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} f_i(x)$, et $\bar{f}(x) = k \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} f_i(x)$ pour $1/(k+1) < x \leqslant 1/k$. Alors $\underline{f} < f_i < \bar{f}$ pour tous les $i = 1, 2, \ldots$

4. Exemple : X et Y sont des ensembles de naturels munis de la relation d'ordre ordinaire. Alors les points (1, 2) et (2, 1) ne sont pas comparables dans $X \times Y$.

5. a) Conséquence immédiate de la définition d'une relation d'ordre partiel.

b) La relation d'ordre dans $\prod\limits_{\alpha \in A} (X_\alpha; x_\alpha)$ est induite par celle de l'ensemble $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Le point distingué est $-\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$.

b) Effectuer une factorisation.

6. Considérer l'ensemble $A = N \times N$ (le produit de deux exemplaires de la série naturelle muni de la relation d'ordre habituelle) et montrer que dans un espace métrique X une suite fondamentale $\{x_n\}$ est fondamentale si et seulement si converge vers 0 la suite généralisée numérique $\{d_\alpha\}_{\alpha \in A}$ construite d'après la formule $d_{mn} = d(x_m, x_n)$.

7. Chaque partie $Y \subset X$ est égale à $\sqcup Y_\alpha$, où $Y_\alpha = Y \cap X_\alpha$ et de plus $Y = \bigsqcup\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha \supset Z = \bigsqcup\limits_{\alpha \in A} Z_\alpha \Leftrightarrow Y_\alpha \supset Z_\alpha$ pour tous les $\alpha \in A$.

8. La fonction $\mu(x, y)$ se déduit à partir du système d'équations suivant :

$$\sum_{y \leqslant z \leqslant x} \mu(z, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x \\ 1 & \text{si } y = x. \end{cases}$$

On établit que ce système admet une solution unique de la manière suivante. Numérotons les éléments de l'ensemble fini $M(x)$ de telle sorte que $x_k \geqslant x_j$ implique que $k \geqslant j$ (cf. exercice 22a). Alors l'application $f \mapsto F$ est définie par une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont égaux à 1. Donc la matrice inverse sera de la même forme et ses éléments sont les valeurs de la fonction μ.

9. Se servir de l'indication de l'exercice 8.

10. a) $\mu(x, x) = 1$, $\mu(x, x-1) = -1$, dans les autres cas $\mu(x, y) = 0$.

b) Se servir de a) et des exercices 6 et 9. Réponse : $\mu(x, y) = \mu_0\left(\frac{x}{y}\right)$, où μ_0 est la *fonction de Möbius* ($\mu_0(1) = 1$, $\mu_0(p_1 \cdot \ldots \cdot p_k) = (-1)^k$, où $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts, et $\mu_0(n) = 0$ dans les autres cas).

c) Se servir des exercices 7 et 9. Réponse : $\mu(A, B) = (-1)^{|A|-|B|}$, où $B < A < X$, $|A|$ et $|B|$ étant les nombres d'éléments respectivement de A et de B.

d) Supposons que le corps principal est composé de q éléments. Alors $\mu(A, B) = (-1)^d \cdot q^{d(d-1)/2}$, où $d = \dim A - \dim B$. Idée de la démonstration : soit $\binom{n}{k}_q$ le nombre des sous-espaces de dimension k dans un espace de dimension n sur un corps de q éléments. Les coefficients $\binom{n}{k}_q$ jouissent des mêmes propriétés que les coefficients binomiaux (en lesquels ils se transforment pour $q = 1$). En particulier

$$\binom{n+1}{k+1}_q = q^{n-k} \cdot \binom{n}{k}_q + \binom{n}{k+1}_q \tag{1}$$

(partager chaque sous-espace de dimension $k+1$ d'un espace de dimension $n+1$ en deux parties : l'une contenue dans un hyperplan donné, l'autre non),

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \binom{n}{k}_q \cdot t^k = (1+t)(1+qt) \ldots (1+q^{n-1}t). \tag{2}$$

(Cette formule se déduit à partir de (1) tout comme le binôme de Newton à partir de la propriété fondamentale des coefficients binomiaux.) L'égalité voulue $\sum_{B \subset C \subset A} \mu(C, B) = 0$ pour $A \neq B$ (cf. indication de l'exercice 8) résulte de l'égalité (2) si l'on pose $t = -1$.

11. a) S'assurer que $\sum_{d/n} \varphi(d) = n$ ($\varphi(d)$ est le nombre d'entiers naturels $m \leqslant n$ dont le p.g.c.d. est n/d). Il s'ensuit que $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(n, d)\, d = \sum_{d|n} \mu_0(n/d) d$ (voir indication de l'exercice 10 b)).

b) Associons à tout polynôme irréductible P de degré d et de coefficient supérieur 1 la série $f_P(X) = 1 + X^d + X^{2d} + \ldots$ Montrer que dans $\prod_P f_P(X)$ (le produit sur tous les polynômes irréductibles) le coefficient en X^n est égal au nombre des polynômes de degré n de coefficient supérieur 1, c'est-à-dire à q^n. D'où il résulte que $\prod_P f_P(x) = 1 + qX + q^2X^2 + \ldots = \frac{1}{1-qX}$. Or $\prod_P f_P(X) = \prod_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{1-X^n}\right)^{P(n, q)}$, de sorte que $\prod_{n \geqslant 1} (1-X^n)^{-P(n, q)} = (1-qX)^{-1}$. En prenant la dérivée logarithmique des deux membres de cette égalité et en la développant suivant les puissances de X, on obtient l'égalité $\sum_{d/n} dP(q, d) = q^n$. D'où

$$P(n, q) = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \mu(n, d) q^d = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \mu_0(n/d) q^d.$$

c) Vérifier que $C(N) = 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant N} \varphi(k) - 1$. Déduire de l'égalité de l'exercice 11 a) que

$$C(N) = \sum_{1 \leqslant d \leqslant N} \mu_0(d) \left[\frac{N}{d}\right] \left(\left[\frac{N}{d}\right] + 1\right) = 1,$$

où $\left[\frac{N}{d}\right]$ représente la partie entière de $\frac{N}{d}$. D'où $\lim_{N \to \infty} \frac{C(N)}{N^2} = \sum_{d \geqslant 1} \frac{\mu_0(d)}{d^2}$. Ce que nous voulions.

Signalons qu'on aurait pu poursuivre les calculs : de la propriété fondamentale de la fonction de Möbius (voir indication du problème 8) il résulte immédiatement que $\sum_{d \geqslant 1} \frac{\mu_0(d)}{d^2} = \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}\right)^{-1}$; on sait que ce nombre est égal à $6/\pi^2$ (voir Ex. 536 c) ou 729).

12. Toutes les propositions résultent immédiatement du fait que $\Phi_n(t) = \prod_{\varepsilon} (t - \varepsilon)$, où ε parcourt toutes les racines primitives de la puissance n-ième de 1. Pour prouver cette égalité utiliser la définition de la fonction de Möbius (exercice 8).

13. Vérification immédiate.

14. Désigner par O^+ l'intérieur de l'ensemble des points positifs (c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in \mathbf{R}^n$ dont tous les points y d'un quelconque de leurs voisinages sont $\geqslant 0$). De façon analogue désignons par O^- l'intérieur de l'ensemble des points négatifs. Montrer que O^+ et O^- sont des ensembles convexes non vides. (Se servir du fait que dans $\mathbf{R}^n$ on peut choisir des bases composées de vecteurs positifs et de vecteurs négatifs.) Prouver ensuite que l'ensemble $\Gamma = \overline{O^+} \cap \overline{O^-}$ (la barre représente l'adhérence) est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ partageant $\mathbf{R}^n$ en deux parties. (Tout segment reliant un point de O^+ à un point de O^- coupe Γ.) D'où il suit que Γ est un hyperplan. Raisonner ensuite par récurrence sur n.

15. a) Supposons que μ_0 est la classe d'équivalence qui contient la série naturelle $\mathbf{N}$ munie de l'ordre naturel. Si M est un ensemble dénombrable totalement ordonné, il contient un plus petit élément m_1. De même, l'ensemble $M \backslash \{m_1\}$ contient un plus petit élément m_2 et ainsi de suite. Soit m_∞ le plus petit élément de l'ensemble $M \backslash \{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ (si cet ensemble est vide, M est équivalent à la série naturelle). Il est clair que l'intervalle $M(m_\infty)$ de l'ensemble M est équivalent à N. Donc la classe M est plus grande que μ_0 et μ_0 est le plus petit élément.

b) Soient M et L deux ensembles dénombrables totalement ordonnés. On dira qu'un élément $m \in M$ est admissible si le segment $M(m)$ est équivalent à un segment de L. Si tous les éléments de M sont admissibles on peut construire une application monotone φ de M sur un segment de L d'après la règle suivante : si l'application φ est définie pour tous les $m < m_1$ alors $\varphi(m_1)$ est le plus petit élément de L n'appartenant pas à l'ensemble $\varphi(M(m_1))$. Si L est épuisé par l'un des ensembles $\varphi(M(m))$, alors M et L sont comparables et $L < M$. Supposer maintenant qu'il existe des éléments non admissibles et soit m_0 le plus petit d'entre eux. Etudier séparément le cas où m_0 couvre un élément et celui où il n'en couvre aucun. Montrer que dans le premier cas $M > L$ et que le second cas est impossible.

c) Soit $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$. Considérons $\mu \in \mathcal{M}_0$ et un représentant M de la classe μ. Si M_1 est un représentant de la classe $\mu_1 \in \mathcal{M}_0$ alors ou bien $\mu_1 \geqslant \mu$, ou bien M_1 est équivalent au segment $M(m_1)$. On obtient ainsi une application monotone $\mu_1 \mapsto m_1$ de cette partie de $\mathcal{M}_0$ qui est située « à gauche » de μ dans un sous-ensemble de M. Comme M est totalement ordonné ce sous-ensemble possède un plus petit élément. Il existe donc aussi un plus petit élément dans $\mathcal{M}_0$.

d) Supposons que $\mathcal{M}$ est dénombrable. Considérons un représentant M_i dans chaque classe $\mu_i \in \mathcal{M}$ et soit $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Munissons M d'une relation d'équivalence. Si $\mu_i < \mu_j$ alors M_i s'applique sur un segment de M_j et l'on dit qu'un point $m \in M_i$ est équivalent à son image dans M_j. Vérifier que la relation ainsi construite est bien une relation d'équivalance, que l'ensemble quotient $\tilde{M}$ correspondant est dénombrable et totalement ordonné et que sa classe $\tilde{\mu}$ est plus grande que toutes les classes $\mu \in \mathcal{M}$, ce qui est impossible.

e) Utiliser le théorème de Zermelo.

16. Appelons $\mu \in \mathcal{M}$ admissible si le segment d'ensemble $\mathfrak{A}$ défini par l'élément $(\mu, 0)$ est équivalent á l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$. En raisonnant comme la démonstration de 15 b) montrer que tous les éléments de $\mathcal{M}$ sont admissibles.

La deuxième proposition de l'exercice résulte de la non-dénombrabilité de $\mathcal{M}$ (voir exercice 15d)) et de la dénombrabilité de la base de la topologie de $[0, 1[$.

17. Voir indication de l'exercice 16.

18. Les éléments maximaux sont les cercles tangents à deux côtés au moins du carré. Parmi eux il n'en existe pas de plus grand.

19. Appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble de tous les systèmes linéairement indépendants de vecteurs de l'espace donné, ordonné par l'inclusion.

20. En raisonnant comme dans la démonstration de l'exercice 15b) montrer que deux ensembles totalement ordonnés quelconques sont comparables (c'est-à-dire que l'un est équivalent à un segment de l'autre).

21. a) Considérer d'abord un ensemble partiellement ordonné dont les éléments sont les parties de l'ensemble donné X munies d'une relation d'ordre total. Montrer que les conditions du lemme de Zorn sont réunies et que l'élément maximal est l'ensemble X tout entier muni d'une relation d'ordre total.

b) Soient X un ensemble partiellement ordonné vérifiant les hypothèses du lemme de Zorn, Y un ensemble de puissance supérieure à celle de X (par exemple $P(X)$). D'après le théorème de Zermelo on peut totalement ordonner Y.

Supposons que X ne contienne pas d'élément maximal et construisons une application monotone φ de Y sur X (ce qui est impossible d'après le théorème de Cantor). De façon plus précise, si φ a déjà définie sur l'intervalle $Y(y_0)$ on convient que $\varphi(y_0)$ est égal à l'élément $x_0 \in X$ qui majore $\varphi(Y(y_0))$ (cet ensemble est ordonné et d'après le lemme de Zorn admet un majorant).

22. a) X étant fini, il contient un élément minimal (c'est-à-dire un élément qui ne couvre strictement aucun autre). Appelons-le x_1. De façon analogue, dans $X \setminus \{x_1\}$ il existe un élément minimal. Désignons-le par x_2. En poursuivant cette procédure on obtient la relation d'ordre cherchée : $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

b) Oui. Une méthode de démonstration consiste à considérer l'ensemble partiellement ordonné des relations d'ordre partiel sur X et de lui appliquer le lemme de Zorn. Une autre méthode, à montrer que tout ensemble partiellement ordonné X se plonge de façon monotone dans $P(X)$ (à tout $x \in X$ associer le sous-ensemble $\mu(x) = \{y \in X : y \leqslant x\}$). Montrer ensuite que l'on peut munir $P(X)$ d'une relation d'ordre contenant l'inclusion. $\Big($Ordonner totalement X d'après le théorème de Zermelo et appliquer l'exercice 13 à $P(X) = \prod_X \{0, 1\}.\Big)$

23. Montrer en utilisant le lemme de Zorn qu'il existe une base de transcendance de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire une famille maximale Ω de nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Montrer que $\mathbf{C}$ est l'adhérence algébrique du corps des fonctions rationnelles de z à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Montrer enfin que la famille Ω a la puissance du continu (si la puissance de Ω) est inférieure à celle du continu, alors celle de $\mathbf{C}$ doit être inférieure à celle du continu).

§ 2. Complétions

24. a) Soit $\{x_n\}$ la suite des centres des boules B_n. Montre que cette suite est fondamentale et que sa limite est le point d'intersection cherché de toutes les boules.

b) Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite fondamentale. Par définition il existe une suite d'indices $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ telle que tous les points x_n, $n > n_k$, sont situés dans la boule fermée B_k de rayon $1/2^k$ et centrée en l'un de ces points. Considérons la boule $\overline{B}_k$ de même centre que B_k et de rayon double. Vérifier que la suite $\overline{B}_k$ est contractile et que son intersection est $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

25. Soient f une fonction uniformément continue sur X, $x_1, x_2, \ldots$ une suite fondamentale et x le point de la complétion correspondant à cette suite. Alors $f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ (la limite existe du fait de la continuité uniforme de f et de la complétude de la droite numérique $\mathbf{R}$).

26. a) L'application $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ est une isométrie de la droite munie de la distance introduite sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ muni de la distance ordinaire. Donc, la complétion de $\mathbf{R}$ est isométrique à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

b) Comme dans a) l'application $x \mapsto e^x$ est une isométrie de l'espace considéré sur l'intervalle $]0, \infty[$. La complétion est isométrique à l'intervalle $[0, \infty[$.

27. On obtient la complétion en ajoutant des « intervalles ponctuels » $[a, a]$, $a \in \mathbf{R}$.

28. Tout d'abord, toute suite d'intervalles contractiles est une suite fondamentale, il leur correspond un point subsidiaire de la complétion distant de $|\Delta|$ de tout intervalle Δ. Montrer qu'on obtient la complétion par adjonction de ce point unique. Pour cela il faut montrer que de toute suite fondamentale d'intervalles fermés non contractiles on peut extraire une suite partielle dont toutes les intersections $\Delta_i \cap \Delta_j$ ne sont pas vides. Utiliser le fait que pour les intervalles fermés s'intersectant la distance est confondue avec celle définie dans l'exercice 27.

29. Montrer que pour toute suite fondamentale $\{f_n\}$ la limite $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ existe pour tous les $x \in X$ et que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers f. Pour montrer que f est bornée, se servir de la majoration $|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+$ $+|f_n(y)-f(y)|$.

30. Se servir de l'inégalité triangulaire.

31. a), b) Toute suite fondamentale de X converge vers un point de l'adhérence de X. Inversement, tout point de l'adhérence de X est limite d'une suite fondamentale de X.

c) Pour complétion de X on peut prendre l'adhérence dans $B(X)$ de son image par l'injection isométrique de l'exercice 30.

32. Utiliser le théorème des boules contractiles (voir exercice 24) pour démontrer d'abord la non-vacuité de l'intersection. Appliquer ensuite cette proposition au cas où l'espace X est l'adhérence d'un sous-ensemble ouvert de X.

33. a) Raisonner par l'absurde. L'ensemble Q des nombres rationnels serait alors l'intersection d'un nombre dénombrable d'ouverts Γ_n. Numéroter les nombres rationnels et soit $\tilde{\Gamma}_n = \Gamma_n \backslash \{r_n\}$, où r_n est le nombre rationnel de rang n. Les ensembles $\tilde{\Gamma}_n$ sont ouverts, densens et $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_n = \varnothing$, ce qui contredit la proposition de l'exercice 32.

b) Soit $\omega_f(x)$ l'oscillation d'une fonction f en un point x. Montrer que pour toute fonction f et tout $c > 0$ l'ensemble $F_c(f) = \{x \in X : \omega_f(x) \geqslant c\}$ est fermé et que l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f est confondu avec $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{1/n}(f)$. Utiliser ensuite la proposition a).

34. La suite $\{P_k\}$ où $P_k = \sum\limits_{i=0}^{k} \left(\frac{x}{2}\right)^i$ est une suite fondamentale qui ne converge pas pour les trois distances.

Signalons que la démonstration de ce fait, semble-t-il évident, cause souvent des difficultés aux étudiants. En effet, l'égalité $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^i = \frac{2}{2-x}$ et le fait que le second membre n'est pas un polynôme $\left(\text{ce qu'il faut encore savoir prouver ; le mieux c'est d'utiliser la non-nullité de toutes les dérivées de la fonction } \frac{2}{2-x}\right)$ n'impliquent pas nécessairement que cette suite diverge pour les métriques a), b) et c). On peut faire la démonstration en raisonnant par l'absurde. Montrer que si la suite donnée admet pour limite un polynôme $P(x) = \sum c_i - x^i$, celui-ci serait :

dans le cas a), identiquement égal à $\frac{2}{2-x}$ pour $x \in [0, 1]$;

dans le cas b), tel que $\int\limits_0^1 \left| P(x) - \frac{2}{2-x} \right| dx = 0$;

dans le cas c), tel que $c_i = \frac{1}{2^i}$ pour tous les $i = 0, 1, \ldots$ Ensuite raisonner comme

plus haut dans le cas a), ramener le cas b) au cas a) en utilisant la continuité de la fonction $P(x)-\dfrac{2}{2-x}$ sur l'intervalle [0, 1].

35. Voir indication de l'exercice 29.

36. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans G. Alors (f_n^{-1}) est aussi une suite de Cauchy. D'après l'exercice 35 les suites (f_n) et (f_n^{-1}) convergent uniformément vers des applications continues f et g. Pour montrer que f et g sont inverses l'une de l'autre se servir de la majoration

$$d_X(fg(x), x) \leqslant d_X(fg(x)-ff_n^{-1}(x))+d_X(ff_n^{-1}(x)-f_nf_n^{-1}(x)).$$

37. Conséquence immédiate de la définition.

38. Soient (x_n) et (y_n) des suites de Cauchy dans $\mathbf{Q}$ pour la distance d_p. Montrer que (x_n+y_n) et (x_ny_n) sont aussi des suites de Cauchy ; si $x_n \not\to 0$, c'est-à-dire $\|x_n\|_p > a > 0$ pour n assez grand, alors $(1/x_n)$ est une suite de Cauchy $\Big($utiliser la majoration

$$\|xy-x'y'\|_p \leqslant \|x\|_p\,\|y-y'\|_p+\|y'\|_p\,\|x-x'\|_p$$

et l'égalité $\left\|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x'}\right\| = \dfrac{\|x-x'\|_p}{\|x\|_p\,\|x'\|_p}\Big)$. S'agissant de la non-complétude de $\mathbf{Q}$ voir indication de l'exercice 39.

39. Montrer que la série $\sum\limits_{i=-k}^{+\infty} a_ip^i$, où $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$ converge dans $\mathbf{Q}_p$ (ceci résulte du fait que ses sommes partielles forment une suite de Cauchy). Soient $x = \sum\limits_{i=-k}^{+\infty} a_ip^i$, $y = \sum\limits_{i=-l}^{\infty} b_ip^i$ et i le plus petit indice pour lequel $a_i \neq b_i$. Montrer que $d_p(x, y) = p^{-i}$ (en particulier le développement suivant les puissances de p est unique). En déduire que la suite $\left(x_n = \sum\limits_{i=-k_n}^{+\infty} a_i^{(n)}p^i\right)$ est une suite de Cauchy si et seulement si pour tout indice i la suite $a_i^{(n)}$ se stabilise pour les grands n. Il s'ensuit que l'ensemble des éléments représentables par une telle somme est fermé. Montrer ensuite que tout nombre rationnel r se représente de la sorte $\Big($il suffit de considérer le cas $r = m/n$, où m et n sont des entiers, n est premier à p ; construire par récurrence des entiers $m_0, m_1, m_2, \ldots$ et $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $(0 \leqslant a_i \leqslant p-1)$ tels que $m_0 = m$, $m_i-a_in = m_{i+1}p$ pour $i \geqslant 0$; alors $r = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_ip^i$ est le développement cherché$\Big)$. Reste à se référer à l'exercice 31.

Montrer qu'un nombre $x \in \mathbf{Q}_p$ est rationnel si et seulement si la fraction correspondante est périodique (se rappeler de la démonstration de la même proposition pour les réels). D'où il résulte que $\mathbf{Q}_p \neq \mathbf{Q}$, c'est-à-dire que $\mathbf{Q}$ n'est pas complet pour une métrique p-adique.

40. Prouvons la dernière égalité. Dans les notations de l'exercice précédent on a $n = 3$, $m = m_0 = 2$. Choisir a_0 tel que $2-3a_0$ soit multiple de 5, c'est-à-dire $a_0 = 4$, $m_1 = -2$. D'autre part $-2-3a_1 = 5m_2 \Rightarrow a_1 = 1$, $m_2 = -1$, $-1-3a_2 = 5m_3 \Rightarrow a_2 = 3$, $m_3 = -2$.

Comme $m_1 = m_3$, les nombres a_i se répètent périodiquement, c'est-à-dire que $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 1$, $a_6 = 3$, etc.

Il est recommandé de vérifier immédiatement que la somme $4+5+3\cdot5^2+5^3+3\cdot5^4+\ldots$ est égale à 2/3 (utiliser la formule de la somme d'une progression géométrique).

41. Chercher $\sqrt{-1}$ sous la forme $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i5^i$, où $0 \leqslant a_i \leqslant 4$. Chercher les nombres a_i par récurrence à partir des congruences $a_0^2 \equiv -1(5)$, $a_0^2+10a_0a_1 \equiv -1(5^2)$, $(a_0+5a_1)^2+$

$+50a_0a_2 \equiv -1(5^3), \ldots, (a_0+5a_1+\ldots+5^{k-2}a_{k-2})^2+2\cdot 5^{k-1}a_0a_{k-1} \equiv -1(5^k)$. Ce système admet deux solutions

$$a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2, \ldots, \quad \text{et} \quad a_0 = 3, a_1 = 3, a_2 = 2, \ldots$$

42. Le plus simple est d'utiliser l'exemple de Hausdorff (voir paragraphe III.2.2) et de remarquer que les nombres $1, 2, \ldots, p^k$ forment un p^{-k} réseau dans $\mathbf{Z}_p$. La deuxième proposition découle de ce que les deux ensembles sont isomorphes au produit d'un nombre dénombrable d'ensembles finis composés chacun de p points.

Si $p = 2$ la correspondance cherchée peut être construite de la manière suivante. Au nombre $\ldots a_2a_1a_0 \in \mathbf{Z}_2$ on associe un nombre réel de l'intervalle $[0, 1]$ dont la décomposition en une fraction ternaire est de la forme $0, b_0b_1b_2, \ldots$, où $b_k = 2a_k$.

43. Montrer par récurrence sur n que $x^{p^n} = x^{p^{n-1}}+p^p\cdot u_n$, où $u_n \in \mathbf{Z}_p$ (pour $n = 1$ utiliser le premier théorème de Fermat). De là il résulte que $\operatorname{sgn}_p(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^{p^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (x+p_1u_1+p^2u_2+\ldots+p^nu_n)$ et $\|\operatorname{sgn}_p x - x\|_p \leqslant p^{-1}$. Déduire de la dernière inégalité que les nombres $\operatorname{sgn}_p a$ sont distincts pour $a = 0, 1, \ldots, p-1$, c'est-à-dire que sgn_p prend un nombre de valeurs supérieur ou égal à p. D'autre part, déduire de la définition de sgn_p que $(\operatorname{sgn}_p x)^p = \operatorname{sgn}_p x$ pour tous les $x \in \mathbf{Z}_{pn}$ et utiliser le fait que l'équation $y^p = y$ ne possède pas plus de p zéros sur $\mathbf{Q}_p$.

44. Déduire à partir de l'exercice 37b) qu'une série de $\mathbf{Q}_p$ converge si et seulement si son terme général tend vers 0. Utiliser les minorations

$$\|k\|_p \geqslant p^{-\log_p^k}, \qquad \|k\|_p = p^{-\left(\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\cdots\right)} \geqslant p^{-\frac{k}{p-1}}.$$

En déduire que le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1}x^k/k$ est $\{x \in \mathbf{Q}_p \mid \|x\| < 1\} = p\mathbf{Z}_p$; le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ pour $p \neq 2$ est le même. Si $p = 2$ le domaine de convergence de la deuxième série est

$$\left\{x \in \mathbf{Q}_2 \mid \|x\| < \frac{1}{2}\right\} = 4\mathbf{Z}_2.$$

45. Le nombre -1 est la limite dans $\mathbf{Q}_p$ d'une suite d'entiers positifs.

46. a) Montrer que la suite des entiers est une suite de Cauchy pour la distance d si et seulement si elle l'est pour les distances 2-adique et 5-adique. L'application de la complétion de $\mathbf{N}$ pour d dans $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_5$ est l'isomorphisme cherché.

b) En vertu de l'isomorphisme de l'exercice a) les terminaisons infinies qui se reproduisent par multiplication correspondent aux solutions de l'équation $x^2 = x$ dans l'anneau $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_5$. Cette équation possède quatre solutions : (0, 0), (0, 1), (1, 0) et (1, 1).

§ 3. Catégories et foncteurs

47. L'ensemble X est un objet répulsif universel de la catégorie duale.

48. Associer à tout ensemble son complémentaire.

49. Oui dans tous les cas.

50. Le groupe des entiers $\mathbf{Z}$ dans G_1 et le groupe trivial dans G_1^0 sont des objets répulsifs universels.

51. La propriété universelle découle de toute construction classique d'un groupe libre. Exhibons une construction d'un groupe libre F_2 de générateurs a et b.

Soient C_a et C_b des groupes cycliques infinis de générateurs a et b. Les éléments de F_2 sont les *mots* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où x_k pour $k = 1, 2, \ldots, n$ appartiennent à l'un des groupes C_a ou C_b, deux termes quelconques consécutifs appartiennent à des groupes différents et aucun terme n'est élément-unité de son groupe ; appelons le nombre n longueur d'un mot.

La longueur d'un mot peut être égale à 0, c'est-à-dire que F_2 contient le mot vide $\varnothing$. Définissons la multiplication des mots par récurrence sur la longueur. Posons $\varnothing \cdot \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \varnothing = (x_1, \ldots, x_n)$ (c'est-à-dire que $\varnothing$ sera élément-unité de F_2). Définissons le produit $(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m)$ séparément dans les trois cas suivants :

(1) Si x_n et y_1 appartiennent à des groupes différents, alors

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

(2) Si x_n et y_1 appartiennent au même groupe et $x_n \neq y_1^{-1}$, alors

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

(3) Si $x_n = y_1^{-1}$, alors

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_{n-1})(y_2, \ldots, y_m)$$

(le produit du second membre est défini par l'hypothèse de la récurrence).

Vérifier que muni de ce produit F_2 est un groupe à deux générateurs a et b et que c'est l'objet universel cherché.

52. Un groupe abélien libre de générateurs a et b peut être défini comme le produit direct de groupes cycliques infinis C_a et C_b. Une autre méthode de construction consiste à prendre le groupe quotient d'un groupe libre à deux générateurs (voir exercice 51) par son commutateur.

53. Voici une construction d'un objet universel. Considérons un espace vectoriel A_n sur K muni d'une base e_I ,où I parcourt les suites finies $(k_1, \ldots, k_N)$, $k_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; si l'on considère des algèbres unitaires, pour I on peut prendre la suite vide. La multiplication sur A_n qui fait d'elle une K-algèbre sera définie d'après la règle $e_I \cdot e_I = e_{II}$, où II' veut dire que l'on fait suivre I de I'. Vérifier que A_n est une K-algèbre associative à n générateurs distingués $e_{(1)}, e_{(2)}, \ldots, e_{(n)}$ et que c'est l'objet universel cherché.

54. On peut définir l'objet universel de $CA_n(K)$ comme l'algèbre quotient de l'objet universel de $A_n(K)$ (voir exercice 53) par l'idéal bilatère construit sur les éléments de la forme $xy - yx$.

55. Voici une construction d'une algèbre de Lie libre à n générateurs $e_1, \ldots, e_n$. Définissons par récurrence une famille d'ensembles E_n, $n \geqslant 1$, en posant $E_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $E_n = \bigsqcup_{k+l=n} E_k \times E_l$ pour $n \geqslant 2$. Posons $M = \bigsqcup_n E_n$ et définissons la multiplication $M \times M \mapsto M$ à l'aide des applications $E_k \times E_l \mapsto E_{k+l} \subset M$ (la flèche exprime l'injection canonique découlant de la définition de E_{k+l}). Soit $K[M]$ un espace vectoriel sur K de base M ; la multiplication introduite fait de $K[M]$ une K-algèbre. L'algèbre de Lie libre à n générateurs peut être définie comme l'algèbre quotient de $K[M]$ par l'idéal bilatère construit sur les éléments de la forme $a \cdot a$ et $(ab)c + (bc)a + (ca)b$. Vérifier la propriété universelle.

Remarquons que les objets universels des exercices 53 et 54 peuvent être obtenus par une construction analogue, c'est-à-dire comme le quotient de $K[M]$ par un idéal bilatère convenable.

56. Définissons $V(\mathfrak{A})$ comme l'ensemble quotient de l'algèbre tensorielle de l'espace $\mathfrak{A}$ par l'idéal bilatère construit sur les éléments de la forme $x \circ y - y \circ x - [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{A}$. Montrer que $V(\mathfrak{A})$ est universel à partir de l'universalité de l'algèbre tensorielle (voir exercice 53).

57. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre libre de Lie à n générateurs. Utiliser la propriété universelle de $\mathfrak{A}$ (exercice 55) et la propriété universelle de $V(\mathfrak{A})$ (exercice 56) pour montrer que $V(\mathfrak{A})$ est un objet universel dans la catégorie $A_n(K)$ (voir exercice 53).

58. La somme est la réunion disjonctive dans la catégorie des ensembles et la somme directe dans la catégorie des espaces vectoriels $\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right)$ est le sous-espace du produit cartésien $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ constitué des vecteurs dont seules un nombre fini de composantes sont non nulles).

59. Dans les catégories d'ensembles et d'espaces vectoriels le produit est un produit cartésien ordinaire.

60. Voir indication des exercices 58 et 59.

61. Désignons par $L_1 \boxtimes L_2$ l'espace vectoriel sur K constitué des combinaisons linéaires formelles de la forme $a \boxtimes b$, où $a \in L_1$, $b \in L_2$. Soit $L_1 \circ L_2$ le sous-espace de $L_1 \boxtimes L_2$ engendré par les expressions de la forme $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \boxtimes b - \lambda_1 (a_1 \boxtimes b_1) - \lambda_2 (a_2 \boxtimes b_2)$ et $a \boxtimes (\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2) - \mu_1 (a \boxtimes b_1) - \lambda_2 (a \boxtimes b_2)$. Désignons par $L_1 \otimes L_2$ l'espace quotient $L_1 \boxtimes L_2 / L_1 \circ L_2$ et par $a \otimes b$ l'image de l'élément $a \boxtimes b \in L_1 \boxtimes L_2$ dans ce sous-espace. Vérifier que l'application de $L_1 \times L_2$ dans $L_1 \boxtimes L_2$ qui à $(a \times b)$ associe $a \otimes b$ est l'objet universel cherché.

62. Soit d le p.g.c.d. des nombres m et n. Vérifier que C_d muni du morphisme canonique $C_m \times C_n \to C_d$ qui envoie (a mod m, b mod n) dans ab mod d est un objet universel (et par suite $\mathrm{Tor}\,(C_m, C_n) = C_d$). Dans le cas général, se servir du fait que tout groupe abélien fini est somme directe de groupes cycliques et le fait que le foncteur Tor est additif en chaque argument.

63. a) Posons A égal à l'ensemble des entiers et faisons de lui un ensemble filtrant pour la divisibilité ($\alpha \leqslant \beta$, si $\alpha \mid \beta$). Posons $X_\alpha = \mathbf{Z}$ pour tous les $\alpha \in A$ et supposons que $\varphi_{\alpha\beta}$ pour $\alpha < \beta$ est la multiplication par β/α. Vérifier que la limite inductive de cette famille est isomorphe au groupe additif $\mathbf{Q}$ (les morphismes $\varphi_\alpha : X_\alpha \to \mathbf{Q}$ sont définis par les formules $\varphi_\alpha(k) = k/\alpha$).

b) Montrer que l'injection $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_p$ induit l'isomorphisme

$$\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p.$$

64. Résulte immédiatement de la définition.

65. Dans les notations de l'indication de l'exercice 61, la structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de $L \otimes_R \mathbf{C}$ est donnée par $z \cdot (a \otimes w) = a \otimes zw$, où $a \in L$, $z, w \in \mathbf{C}$, zw est un produit de nombres complexes.

66. Utiliser le fait que le foncteur F réalisant l'équivalence des catégories définit un isomorphisme du groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}\,(A)$ sur $\mathrm{Aut}\,(F(A))$ et le fait que le groupe multiplicatif des réels n'est isomorphe à aucun groupe de matrices inversibles à coefficients complexes.

67. Pour cette sous-catégorie on peut prendre la catégorie des espaces K^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

68. Pour cette sous-catégorie on peut prendre la catégorie des groupes finis réalisés comme des groupes de transformations d'ensembles $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour un certain n.

69. Résulte immédiatement des définitions.

CHAPITRE 2

THÉORIE DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRALE

§ 1. Théorie de la mesure

1. Algèbre d'ensembles.

70. Résulte de ce que $(A \triangle B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, $(A \backslash B) \subset (A \backslash C) \cup (C \backslash B)$, $(B \backslash A) \subset$ $\subset (C \backslash A) \cup (B \backslash C)$.

71. On s'assure aisément de la validité de ces relations en remarquant que les ensembles A_1 et B_1 sont confondus en dehors de $A_1 \triangle B_1$ et les ensembles A_2 et B_2, en dehors de $A_2 \triangle B_2$. Donc, en dehors de $(A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ on peut dans toutes les formules remplacer A_1 par B_1 et A_2 par B_2.

72. Considérer le système constitué d'un seul ensemble non vide (voir d'autres exemples dans l'exercice 75).

73. $A \cap B = (A \cup B) \backslash ((B \backslash A) \cup (A/B))$, $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

74. La réunion de deux intervalles fermés disjoints n'est pas un intervalle.

75. Il existe en tout 16 familles de parties de X (c'est-à-dire d'éléments de $P(P(X))$). Citons-les :

1) $\varnothing$ la famille vide	9) $\{\{a\}, \{b\}\}$
2) $\{\varnothing\}$	10) $\{\{a\}, X\}$
3) $\{\{a\}\}$	11) $\{\{b\}, X\}$
4) $\{\{b\}\}$	12) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}\}$
5) $\{X\}$	13) $\{\varnothing, \{a\}, X\}$
6) $\{\varnothing, \{a\}\}$	14) $\{\varnothing, \{b\}, X\}$
7) $\{\varnothing, \{b\}\}$	15) $\{\{a\}, \{b\}, X\}$
8) $\{\varnothing, X\}$	16) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$.

Les familles 1) et 12) sont des semi-anneaux, les familles 2), 6) et 7), des anneaux, les familles 8) et 16) des algèbres.

76. Considérer l'intersection de tous les anneaux de $\mathcal{P}(X)$ contenant S.

77. Soit $\tilde{S}$ la famille des ensembles de la forme $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in S$. Si $B =$ $= \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$, $B_j \in S$, alors $A \cap B = \bigsqcup_{k,j} A_k \cap B_j$. Comme $A_k \cap B_j \in S$ l'ensemble $A \cap B$ appartient à $\tilde{S}$. D'autre part, $A \backslash B = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} A_k \backslash B_j$. Il existe des ensembles $C_{kj}^l \in S$, $1 \leqslant l \leqslant n_{kj}$ tels que $A_k \backslash B_j = \bigsqcup_l C_{kj}^l$. Alors $A \backslash B = \bigsqcup_k \bigcap_j \bigsqcup_l C_{kj}^l = \bigsqcup_{k,l} \bigcap_j C_{kj}^l$. Donc $A \backslash B \in \tilde{S}$.

78. Si E est l'unité de l'algèbre, alors

$$\bigcup_n A_n = E\Big\backslash\bigcap_n (E\backslash A_n), \qquad \bigcap_n A_n = E\Big\backslash\bigcup_n (E\backslash A_n).$$

79. Considérons le produit de deux semi-anneaux S_1 et S_2 (la démonstration est la même pour un plus grand nombre de facteurs). Si $A = A_1\times A_2$, $B = B_1\times B_2$, où $A_i, B_i \in S_i$ pour $i = 1, 2$, alors $A\cap B = (A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2) \in S_1\times S_2$. Supposons que $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$; il existe alors des $B_1^{(i)} \in S_1$ et $B_2^{(i)} \in S_2$ tels que $A_1 = B_1\sqcup B_1^{(1)} \ldots B_1^{(k)}$, $A_2 = B_2 \sqcup B_2^{(1)} \ldots B_2^{(l)}$ et $A_1\times A_2 = (B_1\times B_2)\sqcup\left(\bigsqcup_{i=1}^{k}\bigsqcup_{j=1}^{l} B_1^{(i)}\times B_2^{(j)}\right)$.

80. Soit $\mathcal{P}(X)$ l'algèbre des parties d'un ensemble de trois éléments (voir exercice 75). $\{a, a\}\cup\{b, b\} \notin \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$.

81. $\overline{\lim}\, E_n$ est un ensemble de points appartenant à une infinité d'ensembles E_n ; $\underline{\lim}\, E_n$ est un ensemble de points appartenant à tous les ensembles E_n sauf peut-être à un nombre fini d'entre eux.

82. Supposons que $A \neq B$. La limite supérieure de la suite $A, B, A, B, \ldots$ est $A\cup B$, la limite inférieure, $A\cap B$.

83. $X\Big\backslash\bigcap_n\left(\bigcup_{k\geqslant n} E_k\right) = \bigcup_n\left(X\Big\backslash\bigcup_{k\geqslant n} E_k\right) = \bigcup_n\left(\bigcap_{k\geqslant n}(X\backslash E_k)\right)$.

84. Considérons $\chi\left(\overline{\lim_n}\, E_n\right)$ $\left(\chi\left(\underline{\lim_n}\, E_n\right)\right.$ s'étudie de façon analogue$\left.\right)$. Il est immédiat de voir que la condition $\chi(x_0) = 1$ (c'est-à-dire x_0 appartient à une infinité d'ensembles E_n) équivaut à la condition $\overline{\lim_n}\, \chi_n(x_0) = 1$.

85. De l'exercice 84 il s'ensuit que les conditions $\underline{\lim_n}\, E_n = \overline{\lim_n}\, E_n$ et $\underline{\lim_n}\, \chi_n = \overline{\lim_n}\, \chi_n$ sont équivalentes.

86. A l'intersection des ensembles correspond la multiplication des fonctions caractéristiques et à la différence symétrique, l'addition modulo 2.

87. A chaque $\mu \in \mathcal{M}$ (voir exercice 15) associons l'ensemble B_μ des boréliens de la classe μ : B_{μ_0} est l'ensemble des intervalles ; B_μ, l'ensemble des ensembles obtenus à partir des ensembles de la classe $\prec \mu$ par une seule opération de réunion dénombrable, d'intersection dénombrable ou de complémentation. Montrer que $B = \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}} B_\mu$ et que tous les B_μ ont la puissance du continu.

88. Montrer qu'à partir de n ensembles on peut obtenir au plus $2^n - 1$ sous-ensembles disjoints non vides (qu'on appellera primitifs). Il est évident qu'à partir de k ensembles primitifs) on obtient exactement 2^k ensembles distincts. Etudier l'exemple suivant qui montre que notre majoration est exacte: l'ensemble initial A_m, $m = 1, \ldots, n$, est composé de toutes les suites de 0 et de 1 de longueur n comportant 1 à la m-ième place. Réponse : 2^{1023}.

89. $f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1\cap Y_2)$, $f^{-1}(Y_1)\triangle f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1\triangle Y_2)$.

90. Posons $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a', b', d'\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$, $f(a) = a'$, $f(b) = f(c) = b'$, $f(d) = d'$.

Alors $f(\{a, b\})\cap f(\{c, d\}) \notin f(\mathcal{A})$.

91. Si E est l'unité de $\mathcal{B}$, alors $f^{-1}(E)$ est l'unité de $f^{-1}(\mathcal{B})$. On a $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(Y_n) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n\right)$.

92. Pour tous $Y_1, Y_2 \in \mathcal{B}$ on a $f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1\cap Y_2)$, $f^{-1}(Y_1)\triangle f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1\triangle Y_2)$. Comparer avec la méthode de construction du plus petit anneau d'un système d'ensembles, décrite dans les indications de l'exercice 76.

2. Prolongement de la mesure.

93. La mesure extérieure étant sous-additive, on a

$$\mu^*(A)+\mu^*(X\backslash A) \geqslant \mu^*(X) = \mu(X).$$

94. Supposons que A est mesurable. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-ensemble $B \in R$ pour lequel $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Soient $\bar{A} = X\backslash A$, $\bar{B} = X\backslash B$. Alors $\mu^*(\bar{A} \triangle \bar{B}) = \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Doù, en vertu du lemme de la page 20 : $\mu^*(A) < \mu(B)+\varepsilon$, $\mu^*(\bar{A}) < \mu(\bar{B})+\varepsilon$. Donc, $\mu_*(A) = \mu(X)-\mu^*(\bar{A}) > \mu(X)-\mu(\bar{B})-\varepsilon = \mu(B)-\varepsilon > \mu^*(A)-2\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on a $\mu_*(A) \geqslant \mu^*(A)$. D'après l'exercice 93, ceci implique que $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Inversement, supposons que $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Choisissons des ensembles $B_k \in R$ tels que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ et que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) < \mu^*(A)+\varepsilon$. Alors l'ensemble $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ appartient à R contient A et $\mu^*(B\backslash A) < \varepsilon$. Choisissons d'autre part des ensembles $\bar{C}_k \in R$ tels que $\bar{A} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\bar{C}_k) < \mu^*(\bar{A})+\varepsilon$. Soient $\bar{C} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k$ et $C = X\backslash\bar{C}$. On a $C \in R$, $C \subset A$ et $\mu(C) = \mu(X)-\mu(\bar{C}) \geqslant \mu(X)-\mu^*(\bar{A})-\varepsilon = \mu_*(A)-\varepsilon$. Nous avons donc construit des ensembles B et C de R tels que $B \supset A \supset C$ et $\mu(B) < \mu^*(A)+\varepsilon$, $\mu(C) > \mu_*(A)-\varepsilon$. Reste maintenant à se servir de l'égalité $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ pour s'assurer que chacun des ensembles B et C approche A à ε près.

95. Tout sous-ensemble de l'ensemble triadique de Cantor possédant la puissance du continu est mesurable (sa mesure est nulle).

96. Chaque classe d'équivalence contient un borélien (voir exercices 87, 106).

97. Il est évident que a) $\Leftrightarrow$ b), a) $\Leftrightarrow$ c), d) $\Leftrightarrow$ a). Si b) et c) ont lieu, alors

$$\mu\left(\overline{\lim_n} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_k \bigcap_{n \geqslant k} A_n\right) = \lim_k \mu\left(\bigcup_{n \geqslant k} A_n\right) \geqslant \overline{\lim_k}\, \mu(A_k),$$

$$\mu\left(\underline{\lim_n} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_k \bigcup_{n \geqslant k} A_n\right) = \lim_k \mu\left(\bigcap_{n \geqslant k} A_n\right) \leqslant \underline{\lim_k}\, \mu(A_k),$$

d'où l'implication a) $\Rightarrow$ d).

Considérer l'exemple suivant de mesure semi-continue supérieurement et inférieurement pas non σ-additive sur le semi-anneau S des parties de $[0, 1[\cap \mathbf{Q}$:

$$S = \{s_{a,b} = [a, b[\cap[0, 1[\cap \mathbf{Q}\}, \qquad \mu(s_{a,b}) = b-a.$$

98. Utiliser l'inégalité $\mu^*(A \triangle C) \leqslant \mu^*((A \triangle B)\cup(B \triangle C)) \leqslant \mu^*(A \triangle B)+\mu^*(B \triangle C)$ qui résulte de l'exercice 70 et de la sous-additivité de μ^*.

99. Soient $\{\tilde{A}_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{M}$, $A_n \in \tilde{A}_n$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe alors $l(n) \in \mathbf{N}$ tel que $\varrho(\tilde{A}_{n'}, \tilde{A}_{n''}) < 1/2^n$ quels que soient $n' > l(n)$, $n'' > l(n)$. Posons $m(1) = l(1)$, $m(2) = \max\{m(1)+1, l(2)\}$, $m(3) = \max\{m(2)+1, l(3)\}$, et ainsi de suite. Il est facile de montrer que $\mu\left(\overline{\lim_j} A_{m(j)} \Big\backslash \underline{\lim_j} A_{m(j)}\right) = 0$ donc $\{\tilde{A}_n\}$ admet une limite. Une autre démonstration figure dans l'exercice 236.

100. Si un ensemble B est mesurable, alors par définition pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in R(S)$ tel que $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

101. Les ensembles $A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]$ définissent un ensemble $\{\tilde{A}_n\}_{n=1,2,\ldots}$ d'éléments de $\mathcal{M}$, tel que $\varrho(A_l, A_m) = 1/2$ quels que soient $l \neq m$, donc $\mathcal{M}$ n'est pas compact. Pour démontrer que $\mathcal{M}$ est connexe utiliser les applications continues $f_{\tilde{E}} : [0, 1] \to \mathcal{M}$ définies par $f_{\tilde{E}}(t) = \tilde{A}$, où $A = [0, t]\cap E, E \subset \tilde{E}$.

102. a) Eliminons du carré $[0, 1]\times[0, 1]$ tous les points dont une coordonnée au moins est binaire et considérons l'application $\varphi : (x, y) \mapsto z$ qui aux symboles binaires $0, \xi_1\xi_2 \ldots$ et $0, \eta_1\eta_2 \ldots$ de x et de y associe le symbole binaire $0, \xi_1\eta_1\xi_2\eta_2 \ldots$ de z.

Vérifier que φ est une isométrie sur le semi-anneau des rectangles de la forme

$a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, les paramètres a, b, c et d étant binaires, donc qu'elle se prolonge en une isométrie de L_2 sur L_1.

b) S_1 et S_2 ne sont pas isométriques. Considérer dans S_i un couple de points distants de 1.

c) Soit φ une isométrie de R_1 sur R_2. L'application $A \mapsto A \triangle B$ étant une isométrie pour tout B (à vérifier !), on peut admettre que φ envoie $\varnothing$ dans $\varnothing$. D'autre part, la condition $A \subset B$ équivaut à la relation $\varrho(\varnothing, B) = \varrho(\varnothing, A) + \varrho(\varnothing, B)$. Donc φ respecte l'inclusion. Comme $C \subset A \cap B$ est équivalent à $\{C \subset A$ et $C \subset B\}$ et $C \subset A \cup B$ à $\{C \supset A$ et $C \supset B\}$, alors φ commute avec la réunion et l'intersection. De plus, le complémentaire $\bar{A}$ de A est tel que $\varrho(\bar{A}, A) = 1$. Conclusion : φ est un isomorphisme de la $\mathbf{Z}_2$-algèbre R_1 sur la $\mathbf{Z}_2$-algèbre R_2.

Considérons maintenant la famille de rectangles $P_{t,s} = [t, 1] \times [s, 1]$ et leurs images réciproques $Q_{t,s} = \varphi^{-1}(P_{t,s})$. L'ensemble $Q_{t,s}$ appartient à R_1 et par suite est la réunion d'un nombre fini d'intervalles semi-ouverts non contigues. Désignons ce nombre par $n(t, s)$. Deux cas sont possibles : 1) la fonction $n(t, s)$ n'est bornée au voisinage d'aucun point du carré unité ; 2) $n(t, s)$ est bornée sur un carré ouvert.

Dans le premier cas il est possible de construire une suite de rectangles $P_{t_1, s_1} \supset \supset P_{t_2, s_2} \supset P_{t_n, s_n} \supset \ldots$ pour laquelle l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_{t_k, s_k}$ ne sera pas élémentaire. $\Big($Pour cela il faut choisir t_{k+1} et s_{k+1} assez proches de t_k et s_k respectivement pour que chaque intervalle semi-ouvert compris dans Q_{t_k, s_k} ait une partie $\leqslant \frac{1}{2^k}$ de sa longueur, située à l'extérieur de $Q_{t_{k+1}, s_{k+1}}$, et, de plus, que l'on ait $n(t_k, s_k) > k.\Big)$ Ceci contredit cependant l'égalité $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_{t_k, s_k} = Q_{t,s}$, où $t = \lim_{k \to \infty} t_k$, $s = \lim_{k \to \infty} s_k$.

Dans le deuxième cas supposons que $N = \sup_{\substack{|t-t_0| < \varepsilon \\ |s-s_0| < \varepsilon}} n(t, s) < \infty$. Nous pouvons admettre que $n(t_0, s_0) = N$. Alors, quitte à réduire le nombre ε on peut admettre que $n(t, s) = N$ pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon$, $s_0 \leqslant s \leqslant s_0 + \varepsilon$. Donc, l'ensemble $Q(t, s)$, pour des valeurs données de t et de s, est composé de N intervalles semi-ouverts $[a_k, b_k[$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Voyons comment a_k et b_k dépendent de s et de t. Il est clair que a_k ne décroît pas et b_k ne croît pas en chaque argument. De plus, de l'égalité $P_{t,s} = P_{t_0, s} \cap P_{t, s_0}$ il s'ensuit que $a_k(t, s) = \max\{a_k(t, s_0), a_k(t_0, s)\}$, $b_k(t, s) = \min\{b_k(t, s_0), b_k(t_0, s)\}$. Donc, dans un voisinage (dépendant de k) du point $(t_0 + \varepsilon, s_0)$ la fonction $a_k(t, s)$ dépend seulement de t et dans un voisinage du point $(t_0, s + \varepsilon)$, seulement de s. Ce sera également le cas des fonctions $b_k(t, s)$ et $c_k(t, s) = b_k(t, s) - a_k(t, s)$. Or cela contredit l'égalité $\sum_{k=1}^{N} c_k(t, s) = (1-t)(1-s)$.

103. Oui, puisque les ensembles mesurables forment une σ-algèbre.

104. $\mu\Big(\bigcap_k \bigcup_{n \geqslant k} A_n\Big) \leqslant \sum_{n \geqslant k}^{\infty} \mu(A_n)$.

105. Les ensembles mesurables forment une σ-algèbre.

106. Soit $A \subset \mathbf{R}$ un ensemble mesurable. De l'exercice 94 il s'ensuit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $B_\varepsilon \subset A$ tel que $\mu^*(A \backslash B) < \varepsilon$. Alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$ est le borélien cherché.

107. Un sous-ensemble du carré est mesurable si et seulement s'il est de la forme $A \times [0, 1]$, où $A \subset [0, 1]$ et est mesurable-Lebesgue.

108. $\mu_*(\tilde{T}) = 0$, $\mu^*(\tilde{T}) = 1$, donc $\tilde{T}$ n'est pas mesurable (voir exercice 94).

109. On peut obtenir cet ensemble par un procédé analogue à celui qui nous a fourni

l'ensemble triadique de Cantor : éliminer de [0, 1] l'ensemble [0.3 ; 0.4] ; supprimer huit ensembles de la forme $[0.n_1 3\ ;\ 0.n_1 4[$, où $n_1 = 0, 1, 4, 5, \ldots, 9$ et ainsi de suite.

La mesure de l'ensemble restant est

$$1-0{,}1-\sum_{n=1}^{\infty} 8^n \cdot 10^{-n+1} = 0{,}5.$$

110. Le sous-ensemble du carré, formé des points (x, y) pour lesquels $\cos(x+y)$ est rationnel, est de mesure nulle, puisqu'il est constitué d'un nombre fini de segments de droite $x+y = \text{const}$. Réponse : $\pi/6$.

111. Représenter le complémentaire du sous-ensemble considéré par une réunion de quatre sous-ensembles de mesure 0. Réponse : 1.

112. Prolongeons la mesure au semi-anneau de tous les rectangles contenus dans le carré et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré, en affectant à chacun de ces rectangles une mesure égale à $l/\sqrt{2}$, où l est la longueur de l'intersection de ce rectangle avec une diagonale fixée du carré.

113. La mesurabilité-Carathéodory de A implique

$$\mu(X) = \mu^*(A)+\mu^*(X\backslash A) = \mu^*(A)+\mu(x)-\mu_*(A),$$

d'où résulte (comme dans l'exercice 94) la mesurabilité-Lebesgue de A. D'autre part, pour toute partie $Z \subset X$ il existe un ensemble Z_1 mesurable-Lebesgue tel que $X \supset Z_1 \supset Z$, $\mu(Z_1) = \mu^*(Z)$ (Z_1 est l'intersection d'une suite de recouvrements dénombrables de l'ensemble Z par des éléments du semi-anneau, telle que la mesure μ (du n-ième recouvrement) soit inférieure à $\mu^*(Z)+1/n$). On a

$$\mu^*(Z) \leqslant \mu^*(Z\cap A)+\mu^*(Z\backslash A),$$

$$\mu^*(Z) = \mu(Z_1) = \mu(Z_1\cap A)+\mu(Z\backslash A) \geqslant \mu^*(Z\cap A)+\mu^*(Z\backslash A),$$

d'où la mesurabilité-Carathéodory de A.

114. a) Si A est mesurable-Lebesgue, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un B du plus petit anneau tel que $\mu^*(A\triangle B) < \varepsilon$. D'où il vient que $\lambda_i(A\triangle B) \leqslant \mu^*(A\triangle B) < \varepsilon$, et par suite $|\lambda_i(A)-\lambda_i(B)| < \varepsilon$, où $i = 1, 2$. Comme $\lambda_1(B) = \lambda_2(B)$, alors $|\lambda_1(A)-\lambda_2(A)| < 2\varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

b) Soit $a = \mu_*(Y) \leqslant y \leqslant \mu^*(Y) = b$. Construisons le prolongement de Lebesgue ν de la mesure de Lebesgue μ engendrée par m, tel que (il s'agit du prolongement) Y soit ν-mesurable et $\nu(Y) = y$. Il existe des ensembles E_1 et E_2, μ-mesurables tels que

$$E_1 \subset Y \subset E_2, \qquad \mu(E_1) = a, \qquad \mu(E_2) = b.$$

Ajoutons au système des ensembles μ-mesurables toutes les parties de l'ensemble $E = E_2\backslash E_1$ telles que $C = A(Y\backslash E_1)\cup B(E_2\backslash Y)$, $A \subset E$, $B \subset E$, où A et B sont mesurables et définis par l'ensemble C de façon unique à un ensemble près de mesure nulle. Posons

$$\nu(C) = \frac{y-a}{b-a}\,\mu(A)+\left(1-\frac{y-a}{b-a}\right)\mu(B).$$

115. Soit ν la mesure de Lebesgue de [0, 1]. On identifiera les images et contre-images par l'application $f: X \to [0, 1]$ (puisque f est presque partout une bijection). Si $Y = \prod_n Y_n$ et $Y_k \neq X_k$ pour un ensemble infini d'indices $\{k\}$, alors $\mu(Y) = \nu(Y) = 0$. Si $Y = Y_1\times\ldots$ $\ldots\times Y_k\times X_{k+1}\times X_{k+2}\times\ldots$, alors $\mu(Y) = 10^{-n}\prod_{i=1}^{\lambda}$ car $Y_i = \nu(Y)$, puisque Y est composé de $\prod_{i=1}^{k}$ car Y_i intervalles fermés de longueur 10^{-k}. Considérons maintenant le semi-anneau des ensembles L de la forme $[a_n 10^{-k}, b_k 10^{-k}[$. On voit aussitôt que les mesures μ et ν sont confondues sur L et que le prolongement-Lebesgue de L est confondu avec la mesure ordinaire de Lebesgue.

3. Constructions de mesures.

116. Définissons sur l'intervalle [0, 1] la relation d'équivalence : $x \sim y$ si $x-y \in \mathbf{Q}$. Soit A un sous-ensemble de]0, 1] contenant un élément de chaque classe d'équivalence. Pour $r \in]0, 1]$ définissons l'ensemble $A_r \subset]0, 1]$ obtenu à partir de A par une r-translation modulo 1 :

$$A_r \equiv ([r+A] \cup [(r-1)+A]) \cap]0, 1].$$

Il est immédiat de voir que l'intervalle]0, 1] est la réunion d'une famille d'ensembles deux à deux disjoints $\{A_r\}$, où $r \in \mathbf{Q} \cap]0, 1]$. Ramener à une contradiction l'hypothèse de mesurabilité de A.

117. Construire un exemple analogue à celui de l'exercice 116 en introduisant la relation d'équivalence : $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ si

$$x_1 - y_1 \in \mathbf{Q}, \qquad x_2 - y_2 \in \mathbf{Q}.$$

118. Supposons que $A \subset [0, 1[$ n'est pas mesurable. Considérer l'ensemble

$$\{A \times \{0\}\} \cup \{\{0\} \times A\} \subset [0, 1] \times [0, 1].$$

119. Une indication pour la résolution de cet exercice sans utilisation de la notion d'intégrale figure dans l'ouvrage [ ] chap. V, § 6, exercice 15. Signalons aussi que si l'on utilise la notion d'intégrale cet exercice se résout facilement. En effet, si φ est la fonction caractéristique de l'ensemble A, $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt$, alors la proposition de l'exercice résulte de ce que $\Phi'(x) = \varphi(x)$ presque partout.

120. Le théorème de Lebesgue d'intégrabilité-Riemann nous dit qu'une condition nécessaire et suffisante est que la frontière de l'ensemble soit de mesure nulle.

121. Vérification triviale.

122. La première partie est une conséquence de l'exercice 121. L'ensemble triadique de Cantor peut servir d'exemple pour la deuxième partie.

123. Pour la suite de Cauchy $\{\nu_n\}$ posons $\left(\lim_{n \to \infty} \nu_n\right)(A) = \lim_{n \to \infty} \nu_n(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$. La σ-additivité de la fonction d'ensemble $\lim_{n \to \infty} \nu_n$ résulte de l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} \sum_i \nu_n(A_i) = \sum_i \lim_{n \to \infty} \nu_n(A_i), \qquad \text{où} \quad A = \bigcup_i A_i, \qquad A_k \cap A_l = \varnothing$$

pour $k \neq l$, qui, à son tour, est une conséquence de la convergence uniforme des séries $\sum_i \nu_n(A_i)$ en n.

124. De la définition d'un ensemble mesurable on déduit sans peine qu'il existe un parallélépipède B tel que

$$0{,}75\mu(B) \leqslant \mu(M \cap B).$$

Montrer que le parallélépipède B' centré en $0 \in \mathbf{R}^n$, homothétique au parallélépipède B dans le rapport 1/2, appartient à $M-M$. Voici l'idée de la démonstration : si $b \in B'$, alors $(b+M \cap B') \cap (M \cap B')$ n'est pas vide, puisque de mesure positive.

125. Vérification immédiate à l'aide des propriétés d'une série double absolument convergente.

126. Soit $X = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$. Considérer l'anneau des parties de X engendré par les intervalles fermés avec une mesure ordinaire. L'ensemble X est constitué d'un nombre dénombrable de points de mesure 0 chacun.

127. Les démonstrations de la σ-additivité de la mesure de Wiener, connues à ce jour, se réduisent toutes à l'établissement d'une correspondance entre $X = C[0, 1]$ et un espace Y de mesure ν telle que la mesure de Wiener μ se transforme en ν. Voir par exemple [6*]. Dans le chapitre premier de ce livre, on construit un isomorphisme de l'espace (X_0, μ_0) (voir exercice 203) et de l'intervalle [0, 1] avec une mesure standard. Un autre exposé

(voisin) figure dans [4], chap. IX, § 6, n° 7. Ici Y est un produit dénombrable de droites, ν un produit dénombrable de mesures de Gauss $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$.

128. L'ensemble dont il est question dans l'exercice est un cas particulier d'un ensemble de la forme $\chi(t_1, t_2 ; \Delta_1, \Delta_2)$ pour $t_1 = a$, $t_2 = b$, $\Delta_1 =]-\infty, 0[$, $\Delta_2 =]0, \infty[$. Donc la mesure cherchée vaut

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{\infty} \exp\left[\frac{(\sigma-\tau)^2}{2(b-a)}\right] d\sigma\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_{0}^{\infty} s \exp\left[-\frac{s^2}{2(b-a)}\right] ds = \sqrt{\frac{b-a}{\pi}}.$$

129. Posons $f : x \to \{1/x\}$. On a

$$\mu f^{-1}([\alpha, \beta[) = \sum_{n=1}^{\infty} \log_2 \left(\frac{1+\frac{1}{\alpha+n}}{1+\frac{1}{\beta+n}} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\log_2 (\alpha+n+1) + \log_2 (\beta+n) - \log_2 (\beta+n+1) - \log_2 (\alpha+n)] =$$

$$= \log_2 (1+\beta) - \log_2 (1+\alpha) = \mu([\alpha, \beta[).$$

130. a) $f\left(\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\ \dots}}\right) = \left\{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\ \dots}}\right\} = \frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\ \dots}}$.

b) La mesure cherchée est le produit d'un nombre dénombrable de mesures identiques sur N définies par $\mu(\{k\}) = \log_2 \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$.

131. Si la somme de la série ne dépend pas de l'ordre de sommation, alors la série est absolument convergente.

132. a) $|\nu|(X) = \mu_1(X) + \mu_2(X)$;

b) $|\nu|(X) = \sqrt{2}\, \mu_1(X)$.

133. Définissons la charge conjuguée complexe en posant $\bar{\nu}(A) = \overline{\nu(A)}$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$. Alors

$$\operatorname{Re} \nu = (\nu+\bar{\nu})/2, \qquad \operatorname{Im} \nu = (\nu-\bar{\nu})/2.$$

134. Pour tout $A \in \mathfrak{A}$ posons $f(A) = \sup\{|\nu(A')| : A' \subset A,\ A' \in \mathfrak{A}\}$. Supposons que $\sup_{A \in \mathfrak{A}} |\nu(A)| = \infty$; il existe alors $A_0 \in \mathfrak{A}$, $f(A_0) = \infty$. Choisissons par récurrence une suite $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ telle que $f(A_n) = \infty$, $|\nu(A_n)| \geqslant n$. (Supposons que $B \subset A_{n-1}$ et $|\nu(B)| \geqslant |\nu(A_{n-1})| + n$; si $f(B) = \infty$, on posera $A_n = B$, sinon $A_n = A_{n-1} \backslash B$.)

La propriété de continuité d'une fonction σ-additive (voir exercice 97d)) nous conduit à une contradiction : $\nu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \nu(A_n) = \infty$, alors que $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ et par suite $\nu(C) \neq \infty$.

135. On dira qu'un ensemble $E \in \mathfrak{A}$ est *négatif pour* ν si $\nu(E \cap F) \leqslant 0$ pour tout $F \in \mathfrak{A}$; on définit de même un *ensemble positif*. Montrons qu'il existe un ensemble négatif A_- tel que $A_+ = X \backslash A_-$ est positif, d'où la proposition de l'exercice.

Soient $\{A_n\}$ une suite d'ensembles négatifs et $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = a = \inf\{\nu(A) : A$ est négatif$\}$. Alors $A = \bigcup_n A_n$ est négatif et $\nu(A) = a$. Si $A_+ = X\backslash A_-$ n'est pas positif, il existe alors $C_0 \subset A_+$, $\nu(C_0) < 0$. On peut alors exhiber un plus petit entier k_1 pour lequel existe $C_1 \subset C_0$, $\nu(C_1) \geqslant 1/k$. Répétons cette opération pour $C_0\backslash C_1$; nous obtenons C_2 et $k_2 \geqslant k_1$ et ainsi de suite. Montrer que l'ensemble $F_0 = C_0\Big\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ n'est pas vide et est négatif, ce qui contredit la définition de a. Donc A_+ est positif.

136. Tout sous-ensemble de A_+ (resp. de A_-) est positif (resp. négatif).

137. Si $E \in \mathfrak{A}$ est contenu dans $X\backslash(A_+ \cup A_-)$, alors $\nu(E) = 0$.

138. $\nu_+(E) = \nu(E \cap A_+)$, $\nu_-(E) = -\nu(E \cap A_-)$. Appliquer les exercices 134 à 137.

§ 2. Fonctions mesurables

1. Propriétés des fonctions mesurables.

139. Les équivalences se prouvent à l'aide des égalités

$$\{x \in X : f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x \in X : f(x) < a\} = X\backslash\{x \in X : f(x) \geqslant a\},$$

$$\{x \in X : f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : f(x) < a + \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x \in X : f(x) > a\} = X\backslash\{x \mid f(x) \leqslant a\}.$$

140. Toute demi-droite est un borélien ; le plus petit σ-anneau contenant toutes les demi-droites est l'anneau des boréliens.

141. $\left\{x \in X : \dfrac{1}{f(x)} > a\right\} =$

$$= \begin{cases} \{x \in X : 0 < f(x) < a^{-1}\} & \text{si} \quad a > 0, \\ \{x \in X : 0 < f(x) < \infty\} & \text{si} \quad a = 0, \\ \{x \in X : -\infty < f(x) < a^{-1}\} \cup \{x \in X : 0 < f(x) < \infty\} & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

142. $\{x \in X : |f(x)| < a\} = \{x \in X : f(x) < a\} \cap \{x \in X : f(x) > -a\}$.

143. Il est évident que l'ensemble $\{(t_1, \ldots, t_n) : f(t_1, \ldots, t_n) > a\}$ est ouvert et on peut le représenter par une réunion dénombrable de parallélépipèdes de $\mathbf{R}^n$ de la forme $(a_k^{(1)}, b_k^{(1)}) \times \ldots \times (a_k^{(n)}, b_k^{(n)})$. Alors

$$\{x \in \mathbf{R} : h(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbf{R} : a_k^{(i)} < g_i x < b_k^{(i)}\}.$$

144. Construire une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue monotone croissante telle que la contre-image d'un ensemble de mesure 0 soit un ensemble X' de mesure positive (utiliser par exemple un escalier de Cantor). Soient $X \subset X'$ un ensemble non mesurable, $\varphi(y)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $f^{-1}(x)$. Alors $\varphi[f(x)]$ n'est pas mesurable.

145. L'expression $[f(x)]^n$ a un sens pour toute fonction $f(x)$ si seulement n est de la forme $n = k/l$, où $k = 0, 1, 2, \ldots$; $l = 1, 3, 5, 7, \ldots$ Si k est impair la fonction $f(x) = ([f(x)]^{k/l})^{l/k}$ est mesurable d'après l'exercice 143. Pour k pair un contre-exemple nous est fourni par la fonction

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \in A, \\ -1 & \text{pour} \quad x \notin A, \end{cases}$$

où A est un ensemble non mesurable.

146. Supposons que $f(x)$ a été prolongée à droite du point $x = 1$ par différentiation (par exemple $f(1+\alpha) = f(1)+\alpha f'(1)$) et posons $\varphi_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$. Alors $f'(x)$ est limite d'une suite convergente de fonctions continues, donc mesurables : $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.

147. La contre-image du carré $D_{nml} = \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]\times\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ est un intervalle de longueur 2^{-2n}. Considérer les σ-anneaux engendrés par D_{nml} et $f^{-1}(D_{nml})$. Voir également l'exercice 115.

148. Posons $U(a) = \{x \in \mathbf{R} : f(x) < a\}$. Chaque suite dénombrable d'ensembles $U\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$ devient borélienne par élimination d'un ensemble de mesure 0 (exercice 106). La réunion de tous les ensembles éliminés est un borélien de mesure nulle ; sur cet ensemble on peut poser par exemple $f(x) \equiv 0$.

149. Montrer la proposition de l'exercice pour les fonctions simples prenant un nombre fini de valeurs après avoir préalablement prouvé que tout ensemble mesurable $A \subset [0, 1]$ est tel que pour tout $\delta > 0$ il existe un ensemble fermé $B \subset A$ tel que $\mu(A\backslash B) < \delta$. Pour toute fonction $f(x)$ il existe une suite de fonctions simples $f_n(x)$ convergeant vers $f(x)$. Il existe alors une suite d'ensembles fermés $\{K_n\}$, $\mu(K_n) > 1-\frac{\varepsilon}{2^n}$, $f_n(x)$ est continue sur K_n. La suite de fonctions continues $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ sur l'ensemble compact $K = \bigcap\limits_n K_n$, d'où la proposition de l'exercice.

150. En ramenant l'exercice au cas où $f(x)$ est définie sur l'intervalle $[a, b]$ on a en vertu de l'exercice 149 : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable $X_\varepsilon \subset [a, b]$, $\mu(X_\varepsilon) > b-a-\varepsilon$, tel que $f(x)$ est continue sur X_ε. Désignons par $X'_\varepsilon \subset X$ l'ensemble des points de densité ; d'après l'exercice 119 on a $\mu(X'_\varepsilon) = \mu(X_\varepsilon)$. Il est évident que tous les points de X'_ε sont des points de Lebesgue de la fonction f, d'où la proposition de l'exercice puisque ε est arbitraire.

151. La mesurabilité de f résulte de la convergence vers f presque partout de la suite des fonctions en escalier $f_k(x, y) = \min(k, f(x, y))$. La mesure de l'ensemble sur lequel $f(x)$ est finie est égale à

$$10\cdot 10^{-2}+90(10\cdot 10^{-4}+90(10\cdot 10^{-6}+\ \dots\ )) = 1.$$

152. Voir indication de l'exercice 229.

153. $\left\{x : \sup\limits_n f_n(x) > c\right\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > c\}$,

$$\{x : \inf f_n(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) < c\}.$$

154. Résulte de l'exercice 153, puisque

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ f_n(x) = \inf_m \left[\sup_{n>m} f_n(x)\right],$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ f_n(x) = \sup_m \left[\inf_{n>m} f_n(x)\right].$$

155. L'ensemble cherché est :

$$\bigcap_k \bigcup_n \bigcap_m \{x : |f_n(x)-f_{n+m}(x)| < 1/k\}.$$

156. Résulte de l'exercice 153.

157. Posons $F(c) = \mu\{(x : f(x) \leqslant c\}$, alors

$$g(y) = \inf_{F(c) \leqslant y} c.$$

158. Voir indication de l'exercice 157.

159. Conséquence de l'exercice 143.

160. Sur le corps des nombres complexes les cercles et rectangles

$$\{z \in \mathbf{C} : a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b,\ c \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant d\}$$

engendrent le même σ-anneau d'ensembles mesurables.

161. Les composantes des vecteurs dans une base dépendent continûment des composantes dans une autre base. Utiliser l'exercice 143.

2. Convergence des fonctions mesurables.

162. La convergence est évidente. Que cette convergence soit non uniforme résulte du fait que $f_n(n) = 1/2$.

163. La suite converge sur la fonction discontinue

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{pour} \quad x = 1, \end{cases}$$

donc la convergence n'est pas uniforme.

164. Si des fonctions continues ne sont pas identiquement égales en un point, elles ne le seront pas en un voisinage de ce point.

165.
$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

166. Supposons que la suite $\{f_n\}$ ne converge pas vers f sur un ensemble F et converge vers g sur un ensemble G. Alors f et g ne peuvent différer l'une de l'autre que sur l'ensemble $F \cup G$.

167. $[\delta/3, \pi - \delta/3]$.

168. L'ensemble des points $x \in \mathbf{R}$ où $f_k(x) \geqslant \varepsilon$ pour $0 < \varepsilon < 1$ est un intervalle fermé de longueur $2\sqrt{\ln \varepsilon^{-1}}/q_k$. Cette quantité tend vers 0 pour $k \to \infty$. Donc, $f_k \to 0$ en mesure.

Pour tout point $x \in [0, 1]$ considérons une suite partielle de nombres rationnels $\{r_{k_n}\}$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} r_{k_n}$ existe et n'est pas égale à x. Alors $(p_{k_n} - xq_{k_n})^2 \to \infty$ pour $n \to \infty$ et par suite $f_{k_n}(x) \to 0$ pour $n \to \infty$. Il existe une suite partielle $\{r_{k'_n}\}$ telle que $|p_{k'_n}/q_{k'_n} - x| \leqslant 1/q_{k'_n}$. Pour cette suite partielle $f_{k'_n}(x) \geqslant e^{-1}$. Donc, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ n'existe pas.

169. Choisir $\{k_l\}$, $l = 1, 2, \ldots$ de telle sorte que les intervalles fermés sur lesquels $f_{k_l} > 1/l$ ne se coupent pas.

170. Il suffit de remarquer que la méthode la plus naturelle de numération de l'ensemble $\{f_i^{(k)}(x)\}$ est définie par la condition $n = k(k-1)/2 + i$. Il est évident que $\mu(f_i^k(x) \neq 0) = 1/k$, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, g_n(x) = 1$, $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, g_n = 0$.

171. Utiliser les relations

$$E(|h-g| \geqslant \delta) \subset E(|f_n - h| \geqslant \delta/2) \cup E(|f_n - g| \geqslant \delta/2),$$

$$E(h \neq g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(|h-g| \geqslant 1/n).$$

172. Appliquer le théorème d'Egorov. Cf. exercice 149.

173. Considérer $\operatorname{tg} x$ sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Si $\sup |f_1(x)| = M$, alors la suite $\{f_n(x)\}$ ne converge pas vers $f(x)$ sur l'un au moins des intervalles $[-\pi/2, \operatorname{arctg} M]$ ou $[\operatorname{arctg} M, \pi/2]$.

Remarque. En se servant du théorème de Lévy on démontre sans peine qu'une fonction mesurable $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ telle que $\int_{[a,b]} f_+(x)\,dx = \int_{[a,b]} f_-(x)\,dx = +\infty$ ne peut être représentée sous forme d'une limite monotone d'une suite de fonctions sommables.

174. Montrons que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, où $\varphi_n(x)$ sont continues, est contradictoire. Posons $F_n = E(\varphi_n \leqslant 0{,}5)$ ceci est l'ensemble des points x tels que $\varphi_n(x) \leqslant 0{,}5$.

On a $E(\varphi < 0{,}5) = \underline{\lim}_n F_n$, ce qui contredit le fait que l'ensemble des nombres irrationnels n'est pas la réunion d'un nombre dénombrable d'ensembles fermés (voir exercice 33a).

Remarque. Les fonctions non continues représentables par la limite d'une suite de fonctions continues sont dites fonctions de *première classe de Baire.* La fonction de Dirichlet appartient à la deuxième classe de Baire (double passage à la limite) ;

175. La condition nécessaire est évidente (pour toute fonction mesurable). La condition suffisante résulte du fait que la contre-image de tout borélien est la réunion d'un ensemble au plus dénombrable de niveaux. Considérer l'exemple suivant de fonction non mesurable $f_E : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ où $E \subset \mathbf{R}$ est un ensemble non mesurable :

$$f_E(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in E \\ -x & \text{si} \quad x \notin E. \end{cases}$$

176. Pour la fonction $f(x)$ considérer la suite $\{f_n(x)\}$, où $f_n(x) = m/n$ si $m/n \leqslant f(x) < (m+1)/n$, $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{Z}$.

177. La mesure de l'ensemble des nombres de $[0, 1]$ dont l'écriture décimale comprend le chiffre 9 est égale à $10^{-1} + 9(10^{-2} + 9(10^{-3} + \ldots)) = 1$.

178. $f(x)$ est mesurable comme limite de fonctions mesurables et est presque partout égale à 9.

179-181. Les fonctions $f(x)$ sont continues pour la topologie de convergence uniforme, μ est définie sur les boréliens pour cette topologie.

182. Il suffit de montrer que tout ensemble ouvert appartient à $\mathfrak{A}$. Ceci résulte du fait que toute boule appartient à S, que les boules constituent une base de voisinages et qu'un nombre dénombrable de boules sont différentes (un nombre dénombrable de rayons sont différents et chaque boule contient un nombre naturel).

183. L'ensemble A étant ouvert on peut le représenter sous forme d'une réunion d'un ensemble de boules d'où l'on peut extraire un sous-recouvrement fini puisque A est une partie fermée de X et par suite compacte. Il suffit de vérifier la σ-additivité de μ pour le semi-anneau de toutes les boules. Comparer avec le lemme de la page 24.

184. Il suffit de vérifier les propriétés a) et b) pour le semi-anneau des boules. L'unicité de la mesure résulte de ce que chaque boule de rayon p^{-k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$ est constituée de p boules de rayon $p^{-(k+1)}$ dont les mesures sont confondues d'après la propriété b).

§ 3. Intégrale

1. L'intégrale de Lebesgue.

185. Utiliser les propriétés des séries absolument convergentes.

186. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{e}{e-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

187. Pour toute partition $T = \{t_k\}$ définissons les sommes intégrales supérieures et inférieures de Lebesgue : $\overline{S}(T) = \sum_k t_{k+1}\mu(e_k)$, $\underline{S}(T) = \sum_k t_k\mu(e_k)$, où $e_k = \{x \in X : t_k \leqslant f(x) < t_{k+1}\}$. Montrer que si $f(x)$ est sommable, alors $\overline{S}(T)$ et $\underline{S}(T)$ convergent, $\underline{S}(T) \leqslant \int_X f(x)\,d\mu \leqslant \overline{S}(T)$, $\int_X f(x)\,d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} \underline{S}(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}(T)$ (utiliser la majoration $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \leqslant \lambda(T)\,\mu(X)$).

188. Ramener l'exercice au précédent à l'aide de la fonction

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ et } 0 \text{ appartiennent à } [t_k, t_{k+1}], \\ f(x) \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

189. Utiliser les propriétés des séries absolument convergentes.

190. $S[0, 1]$ s'applique isométriquement dans $L_1[0, 1]$, où la suite $f_n(x)$ tend vers la fonction $f(x) \equiv x \notin S[0, 1]$.

191. a) Pour $\alpha > -1-\beta(\beta > 0)$ et $\alpha > -1(\beta < 0)$;
b) pour $\alpha > -1-|\beta|$.

192. a) La suite approximante de fonctions simples peut être choisie non négative.
b) $\mu(\{x : f(x) > 0\}) \leqslant \sum_n \mu\left(\left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$

193. On a $\mu(\{x \in [a, b] : t_k \leqslant \varphi(x) < t_{k+1}\}) = \psi(t_{k+1})-\psi(t_k)$.
D'après le théorème de Lagrange $\psi(t_{k+1})-\psi(t_k) = \psi'(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)$.

194. Dans les notations des indications de l'exercice 187 définissons l'ensemble mesurable sur le plan : $E(T) = \bigcup_k \{(x, y) : f(x) \in [t_k, t_{k+1}), 0 \leqslant y \leqslant t_k\}$. La proposition de l'exercice résulte du fait que $\mu E(T) = \underline{S}(T)$, $E \triangle E(T) \leqslant \lambda(T)(b-a)$.

195. Utiliser des suites de fonctions simples monotones non décroissantes convergeant uniformément vers $f(x)$.

196. Montrer que la sommabilité de $f(x)$ entraîne celle de $|f(x)|$. Se servir de l'égalité $\int_A [g(x)+h(x)]\,d\mu(x) = \int_A g(x)\,d\mu(x) + \int_A h(x)\,d\mu(x)$.

197. Si $f(x)$ n'est pas sommable, pour tout $c > 0$ il existe une fonction simple $g(x)$ telle que $f(x)-1 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$,

$$\int_X g(x)\,d\mu(x) > c.$$

Il existe manifestement un ensemble A sur lequel $g(x)$ prend un nombre fini de valeurs et qui est tel que

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) \geqslant \int_A g(x)\,d\mu(x) > c-1.$$

198. Posons $a_n = \mu(\{x \in X : 2^n \leqslant f(x) < 2^{n+1}\})$. La sommabilité de f équivaut à la convergence de chacune des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{n+1}$. Montrer que les sommes partielles de la série intervenant dans l'hypothèse sont comprises entre les sommes partielles respectives de ces séries.

199. Utiliser la méthode de résolution de l'exercice 198.

200. a) 1 ; b) 1 ; c) $\pi/4$; d) 1, puisque l'ensemble $\{(x, y) : xy \in \mathbf{Q}\}$ est constitué d'un nombre dénombrable d'hyperboles $xy = \text{const}$.

201. L'intégrale de Riemann est définie seulement pour les fonctions bornées. Considérons une suite $\{P_n\}$ de partitions de l'intervalle $[a, b]$ telle que P_{k+1} raffine P_k et les diamètres des partitions tendent vers 0. Soient $m_n(x)$ et $M_n(x)$ les fonctions correspondant aux sommes inférieure et supérieure de Darboux pour P_n, $m_n(x) \leqslant f(x) \leqslant M_n(x)$. Posons $m(x) = \lim_{n\to\infty} m_n(x)$, $M(x) = \lim_{n\to\infty} M_n(x)$. Montrer que $f(x)$ est intégrable-Riemann si et seulement si

$$\int_a^b m(x)\,dx = \int_a^b M(x)\,dx.$$

D'après l'exercice 192 cette condition équivaut à la condition $m(x) = M(x)$ presque partout qui, à son tour, équivaut à la continuité de $f(x)$ presque partout.

202. Par un changement orthogonal linéaire des variables ramener l'exercice au cas où la matrice A est diagonale.

203. Remplaçons l'intégrale $\int_0^1 x^2(t)\,dt$ par la somme intégrale $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^2\left(\frac{k}{n}\right)$.

L'intégrant $\varphi_{abn}(x)$ sera alors une fonction en escalier et son intégrale se calcule par la formule

$$I_n = \pi^{-n/2} n^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-n \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{kn}-\tau_k)^2 - a\tau_0^2 - b^2 \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2\right\} d\tau_0\, d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

D'après l'exercice 202 on a $I_n = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,(\det A)^{-1/2}$, où A est une $(n+1)\times(n+1)$-matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{a}{n}, & -1, & 0, & 0, \dots, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 2+\frac{b^2}{n^2}, & -1, & 0, \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 2+\frac{b^2}{n^2}, & -1, \dots, & 0, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, & -1, & 2+\frac{b^2}{n^2}, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, & 0, & -1, & 1+\frac{b^2}{n^2} \end{pmatrix}.$$

Calculons det A. Désignons par $D_N(\lambda, \mu)$ le déterminant de la $N\times N$-matrice dont les éléments de la diagonale principale sont tous égaux à λ et ceux de la première sous-diagonale et de la première superdiagonale égaux à μ (les autres éléments sont nuls). En développant ce déterminant suivant la première ligne on obtient l'identité principale : $D_N(\lambda, \mu) = \lambda D_{N-1}(\lambda, \mu) - \mu^2 D_{N-2}(\lambda, \mu)$. D'où l'on déduit par réccurence que $D_N(\lambda, \mu) = \frac{x_+^{N+1} - x_-^{N+1}}{x_+ - x_-}$, où $x_\pm$ sont les racines du trinôme du second degré $x^2 - \lambda x + \mu^2 = 0$. Si $\lambda = 2+\frac{b^2}{n^2}$, $\mu = -1$ alors $x_\pm = 1+\frac{b^2}{2n^2} \pm \frac{b}{n}\sqrt{1+\frac{b^2}{4n^2}}$.

Pour ces valeurs de λ et μ désignons $D_N(\lambda, \mu)$ simplement par D_N. Alors $\det A = D_{n+1} + \left(\frac{a}{n} - \frac{b^2}{n^2} - 1\right) D_n + (-1) D_n + \left(\frac{a}{n} - \frac{b^2}{n^2} - 1\right)(-1) D_{n-1}$ (développement suivant la première et la dernière ligne). En se servant de l'identité principale on peut ramener cette expression à la forme

$$\frac{a}{n}(D_n - D_{n-1}) + \frac{b^2}{n^2} D_{n-1}.$$

Calculons

$$D_n = \frac{x_+^{n+1} - x_-^{n+1}}{x_+ - x_-} = \frac{\left(1+\frac{b}{n}+\frac{b^2}{2n^2}+o(n^{-2})\right)^{n+1} - \left(1-\frac{b}{n}+\frac{b^2}{2n^2}+o(n^{-2})\right)^{n+1}}{\frac{2b}{n}+o(n^{-2})} =$$

$$= \frac{\exp\left\{\left[\frac{b}{n}+o(n^{-2})\right](n+1)\right\} - \exp\left\{-\left[\frac{b}{n}+o(n^{-2})\right](n+1)\right\}}{\frac{2b}{n}+o(n^{-2})} =$$

$$= \frac{\exp\left\{b+\frac{b}{n}+o(n^{-1})\right\} - \exp\left\{-b-\frac{b}{n}+o(n^{-1})\right\}}{\frac{2b}{n}+o(n^{-2})} = n\frac{\operatorname{sh} b}{b} + \operatorname{ch} b + o(1).$$

De façon analogue $D_{n-1} = n\dfrac{\operatorname{sh} b}{b} + o(1)$. D'où

$$\det A = \frac{a}{n}(\operatorname{ch} b + o(1)) + \frac{b^2}{n^2}\left(n\frac{\operatorname{sh} b}{b} + o(1)\right) = \frac{a\operatorname{ch} b + b\operatorname{sh} b}{n} + o(n^{-1}).$$

Donc

$$I_n = \sqrt{\frac{\pi}{a\operatorname{ch} b + b\operatorname{sh} b}} + o(1).$$

Donc

$$\int\limits_{C[0,1]} \varphi_{abn}(x)\,d\mu(x) = I_n \to \sqrt{\frac{\pi}{a\operatorname{ch} b + b\operatorname{sh} b}} \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

D'où il résulte d'après le lemme de Fatou que les fonctions $\varphi_{ab}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{abn}(x)$ seront μ-sommables pour $a > 0$, $b \geqslant 0$ ou $a \geqslant 0$, $b > 0$. Comme $\varphi_{abn}(x) \leqslant \varphi_{a0n}(x) = \varphi_{a0}(x)$ on peut appliquer le théorème de Lebesgue et

$$\int \varphi_{ab}\,d\mu = \lim \int \varphi_{abn}\,d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{a\operatorname{ch} b + b\operatorname{sh} b}}.$$

204. Toute fonction $x \in C[0, 1]$ se représente de façon unique sous la forme $x(t) = c + y(t)$, où $c = x(0)$ est une constante et $y \in C_0[0, 1]$. La mesure μ_0 sur $C_0[0, 1]$ est définie par

$$\mu_0(x(t_1, \ldots, t_n)\Delta_1, \ldots, \Delta_n) =$$
$$= \pi^{-n/2}\prod_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})^{-1/2}\int\limits_{\Delta_1}\cdots\int\limits_{\Delta_n}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^2}{(t_k - t_{k-1})}\right\}d\tau_1, \ldots, d\tau_n,$$

où $t_0 = \tau_0 = 0$ et l'ensemble $x(t_1, \ldots, t_n;\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, comme précédemment.

205. a) $\mu_0(C_0[0, 1] = \mu_0(x(t_1, \ldots, t_n;\ R, \ldots, R)) = \pi^{-n/2}\prod\limits_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})^{-1/2}\times$ $\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(\tau_k - \tau_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}\right]d\tau_1, \ldots, d\tau_k$. En désignant $\tau_k - \tau_{k-1}$ par σ_k et $t_k - t_{k-1}$ par s_k on obtient $\pi^{-n/2}\prod\limits_{k=1}^{n}s_k^{1/2}\prod\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\sigma_k^2/s_k}\,d\sigma_k = 1$.

b) La mesure μ_0 étant invariante et l'intégrant changeant de signe par l'application $x \to -x$, l'intégrale est nulle si elle existe. La sommabilité de l'intégrant résulte de l'exercice 203 et de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski.

c) Soit $x(t) = c + y(t)$, $y \in C_0[0, 1]$. Le résultat de l'exercice peut être formulé comme suit. Si

$$\varphi_1(y) = \int\limits_0^1 y(t)\,dt, \qquad \varphi_2(y) = \int\limits_0^1 y^2(t)\,dt,$$

alors

$$\int\limits_{\mathbf{R}}\int\limits_{C_0[0,1]}\exp\{-ac^2 - b^2[c^2 + 2c\varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\}\,dc\,d\mu_0 y = \sqrt{\frac{\pi}{a\operatorname{ch} b + b\operatorname{sh} b}}.$$

Posons $c = t/\sqrt{a}$ et faisons tendre a vers $+\infty$. Nous sommes conduits à la relation

$$\int\limits_{\mathbf{R}}\int\limits_{C_0[0,1]} e^{-t^2 - b^2\varphi_2(y)}\,dt\,d\mu_0(y) = \sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch} b}}$$

ou

$$\int\limits_{C_0[0,\,1]} e^{-b^2\varphi_2(y)}\,d\mu_0(y) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} b}}.$$

D'où il s'ensuit que les intégrales $\int\limits_{C_0[0,\,1]} \varphi_2^k(y)\,d\mu_0(y)$ peuvent être calculées par développement de la fonction $1/\sqrt{\operatorname{ch} b}$ en série de Taylor. En particulier

$$\int\limits_{C_0[0,\,1]} \varphi_2(y)\,d\mu_0(y) = \frac{1}{4}, \qquad \int\limits_{C_0[0,\,1]} \varphi_2^2(y)\,d\mu_0(y) = \frac{7}{48}.$$

206. a) Soit $|f(x)| \leqslant M$. Il est immédiat de voir que

$$\int\limits_X |f(x)|\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M}{2^{n-1}}-\frac{M}{2^n}\right)\mu\left\{x\in X:\ |f(x)|>\frac{M}{2^n}\right\} \leqslant AM^{1-\alpha}\sum_1^{\infty} 2^{(\alpha-1)n} < \infty,$$

d'où l'intégrabilité de $f(x)$.

b) Il est évident que

$$\int\limits_X |f(x)|\,d\mu \leqslant \mu\{x\in X:\ |f(x)\leqslant 1\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\mu\{x\in X:\ |f(x)>2^n\} \leqslant \mu(X)+2A\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} < \infty,$$

d'où l'intégrabilité de $f(x)$.

207. a) Utiliser le résultat de l'exercice 130.

b) D'après la proposition de l'exercice 130 on a $\mu(M(\{a_k\})) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{[a_k]}\log_2\dfrac{(k+1)^2}{1(1+2)} =$ $= \prod\limits_{k=1}^{\infty}\log_2\dfrac{2([a_k]+1)}{[a_k]+2}$. Le terme général de ce produit peut s'écrire : $1-\log_2\dfrac{[a_k]+2}{[a_k]+1}$.

Réponse $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_k} = \infty$.

2. Fonctions à variation bornée et intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

208. Vérification immédiate.

209. a) $f(x)$ est bornée puisqu'elle satisfait à la condition de Lipchitz ; b) $f(x)$ n'est pas bornée. Considérer la partition $\left\{0, \dfrac{2}{\pi n}, \dfrac{2}{\pi(n-1)}, \ldots, \dfrac{2}{n}, 1\right\}$.

210, 211. Ces propositions résultent de celles relatives aux fonctions monotones.

212. Utiliser le théorème de Lagrange.

213. Utiliser les sommes intégrales de Darboux et le théorème de Lagrange.

214. a) $e^{50}-1$; b) $\ln 2$; c) 8 ; d) $8\sqrt{3}/9$.

215. $\{a_k\}$ sont les points de discontinuité (cf. exercices 210)

$$c_k = \Phi(a_k+0)-\Phi(a_k).$$

216. Utiliser les majorations :

a) $|f\cdot g(x_{n+1})-f\cdot g(x_n)| \leqslant |f(x_{n+1})\,g(x_{n+1})-f(x_n)\,g(x_{n+1})|+$
$+|f(x_n)\,g(x_{n+1})-f(x_n)\,g(x_n)| \leqslant |f(x_{n+1})-f(x_n)|\sup\{|g(x)|\}+$
$+|g(x_{n+1})-g(x_n)|\sup\{|f(x)|\}$;

b) $\left|\dfrac{1}{f(x_{n+1})}-\dfrac{1}{f(x_n)}\right| = \dfrac{|f(x_n)-f(x_{n+1})|}{|f(x_{n+1})|\,|f(x_n)|} \leqslant \alpha^{-2}\,|f(x_{n+1})-f(x_n)|$.

217. a) Considérer les fonctions

$$f(x) = x, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

b) Construire une fonction monotone $\varphi(x)$ telle que $\varphi\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{n}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\varphi(0) = 0$ et $f(x)$ soit à variation bornée sur l'intervalle $[0, 1]$ et telle que $f(x_n) = 2^{-n}$, $f(y_n) = 0$ pour une suite $1 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots > 0$. Alors le fait que $\varphi(f)$ soit à variation bornée résulte de la divergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

218. Raisonner par l'absurde.

219. Soit $\varphi : I = [a, b] \mapsto S = [0, 1]\times[0, 1]$ une application sur S défine par $\varphi(x) = (f(x), g(x))$. Considérons n^2 points de S de la forme $\left(\dfrac{k}{n}, \dfrac{l}{n}\right)$, où k, $l = 1, \ldots, n$ et leurs contre-images $a \leqslant x_1 < \ldots < x_{n^2} \leqslant b$, $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$ pour $i = j$.

On a $\operatorname{Var}_a^b [f(x)] + \operatorname{Var}_a^b [g(x)] \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n^2-1} [|f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |g(x_{i+1}) - g(x_i)|] \geqslant$ $\geqslant \dfrac{(n^2-1)}{n}$, ce qui contredit le fait que $f(x)$ et $g(x)$ sont simultanément à variation bornée.

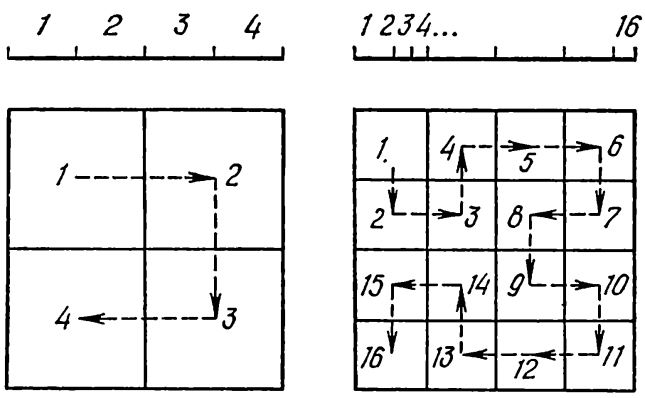


Fig. 3

La proposition de l'exercice est fausse si l'on n'exige pas que les fonctions f et g soient à variation bornée. Pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ partager S et I en 4^n carrés et intervalles fermés respectivement et établir une correspondance entre ces carrés et ces intervalles associant à tout intervalle et ses sous-intervalles un carré et ses sous-carrés (fig. 3). Si $x \in I$ alors x est point d'intersection d'une suite d'intervalles fermés à laquelle correspond une suite de carrés emboités dont il faut prendre le point d'intersection pour $\varphi(x)$. Comparer avec l'exercice 452.

220. Vérifier pour les sommes intégrales et passer à la limite.

221. De la discontinuité de $\Phi(x)$ en c il résulte que (voir exercice 210) pour toutes les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ telles que $a < a_1 < a_2 < \ldots < c < \ldots < b_2 < b_1 < b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ on a $|\Phi(b_n) - \Phi(a_n)| \to K > 0$ pour $n \to \infty$. De l'intégrabilité de f par rapport à Φ il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to\infty} |\Phi(b_n) - \Phi(a_n)|\, f(x)\Big|_{a_n}^{b_n} = 0$. Donc, $f(x)\Big|_{a_n}^{b_n} \to 0$ ce qui exprime que $f(x)$ est continue en c.

222. D'après l'exercice 220 b) on a $\int\limits_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\Phi_N(x) + \int\limits_a^b f(x)\, d\tilde{\Phi}_N(x)$,

où $\Phi_N(x)$ est différente de 0 en les N premiers points, et $\tilde{\Phi}_N(x)$ en les autres points. Il est évident que la première intégrale est nulle ; appliquer la majoration de l'exercice 220 a).

223. Supposons que Ψ est une fonction à variation bornée qui n'est différente de Φ qu'aux points de discontinuité. D'après l'exercice 210 la fonction $\Phi - \Psi$ est différente de 0 en un nombre de points au plus dénombrable. Appliquer les résultats des exercices 220 b) et 222.

224. Considérons deux partitions : $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et $\xi_0 = a, \xi_1, \ldots, \xi_{n+1} = b$, où $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

On a

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})] = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g(x_i)\,[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})].$$

225. Former la somme intégrale et considérer les intervalles contenant les points $\{c_k\}$.

226. Voir exercice 224. Réponse : $b\varphi(b) - a\varphi(a) - \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

227. $I_1 = -1\cdot 1 + 2(-2) = -5, \qquad I_2 = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{9}{4}(-2) = -17/4.$

228. $I_1 = \int_{-2}^{-1} x\,dx + 1 + \int_0^2 2x^2\,dx = 17/6,$

$$I_2 = \int_{-2}^{-1} x^2\,dx + 1 + \int_0^2 2x^3\,dx = 34/3,$$

$$I_3 = \int_{-2}^{-1} (x^3+1)\,dx + 1 + \int_0^2 2(x^3+1)x\,dx = 301/20.$$

229. Partageons l'intervalle [0, 1] en 2^n parties égales et pour $y \in \min\,[f(x), \max f(x)]$ définissons $N_n(y)$ comme le nombre de parties qui contiennent au moins une racine de l'équation $f(x) = y$. Les fonctions $N_n(y)$ sont mesurables, puisqu'elles ne présentent qu'un nombre au plus fini de discontinuités. Montrer que $N_f(y) = \lim_{n\to\infty} N_n(y)$ et utiliser l'exercice 154. L'égalité de l'intégrale et de la variation se vérifie immédiatement.

230. a) Désignons $\int_0^1 x^k\,d\Phi(x)$ par a_k. Utilisons la propriété suivante de la fonction $\Phi(x)$: $\Phi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}\Phi(x)$, $\Phi\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(x)$, propriété qui résulte immédiatement de la définition. Donc

$$a_k = \int_0^{1/3} x^k\,d\Phi(x) + \int_{2/3}^{1} x^k\,d\Phi(x) = \frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_0^1 y^k\,d\Phi(y) + \int_0^1 (2+y)^k\,d\Phi(y)\right] =$$

$$= \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{2\cdot 3^k}\sum_{s=1}^{k} C_k^s\cdot 2^s a_{k-s}.$$

D'où $a_k = \dfrac{1}{2(3^k-1)}\displaystyle\sum_{s=1}^{k} C_k^s\cdot 2^s a_{k-s}.$

Sachant que $a_0 = 1$ on obtient de proche en proche $a_1 = 1/2$, $a_2 = 3/8$, $a_3 = 5/16$, $a_4 = 87/320, \ldots$

b) Désignons $\int_0^1 e^{ax}\,d\Phi(x)$ par $\Psi(a)$ et utilisons la méthode de résolution de l'exercice a). On a

$$\Psi(a) = \int_0^{1/3} e^{ax}\, d\Phi(x) + \int_{2/3}^{1} e^{ax}\, d\Phi(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{ay/3}\, d\Phi(y) + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2/3a + ay/3}\, d\Phi(y) + \frac{1}{2}(1+e^{2/3a})\, \Psi\left(\frac{a}{3}\right) =$$

$$= e^{2a/3} \operatorname{ch} \frac{a}{3}\, \Psi\left(\frac{a}{3}\right).$$

L'itération de la formule obtenue nous donne

$$\Psi(a) = e^{a/3} e^{a/9} \ldots e^{a\cdot 3^{-k}} \operatorname{ch} \frac{a}{3} \operatorname{ch} \frac{a}{9} \ldots \operatorname{ch} \frac{a}{3^k}\, \Psi\left(\frac{a}{3^k}\right).$$

De toute évidence $\psi(a) \to 1$ pour $a \to 0$. Donc

$$\Psi(a) = e^{a/2} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{ch}\left(\frac{a}{3^k}\right).$$

c) De b) il s'ensuit que

$$\int_0^1 \sin \pi x\, d\Phi(x) = \frac{1}{2i}[\Psi(\pi i) - \Psi(-\pi i)] = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right).$$

3. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue.

231. a) Résulte de l'inégalité de Tchébychev :

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\}) \leqslant \varepsilon^{-1} \int_X |f(x)|\, d\mu(x).$$

b) La réciproque est vraie pour une suite de fonctions bornées sur un ensemble de mesure finie. Dans le cas général elle est mise en défaut. Contre-exemple : $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$ sur $]-\infty, \infty[$, $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$ sur $[-1, 1]$.

232. Etudier l'exemple : $X = \mathbf{R}$, μ la mesure de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n^2, n^2]}$.

233. $f_n(x) = n\chi_{[0, 1/n]}$.

234. Pour établir l'inégalité triangulaire utiliser la relation $\lambda \leqslant (\lambda a + \mu b)/(a+b) \leqslant \mu$ pour $\lambda \leqslant \mu$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

235. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions fondamentale pour la mesure. Montrer que de $\{f_n\}$ on peut extraire une suite partielle $\{f_n^1\}$ telle que $\mu\left\{x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} f_n^1(x)\right\} \geqslant \mu(X) - 1$. De façon analogue, de la suite $\{f_n^k\}$ on peut extraire une suite partielle $\{f_n^{n+1}\}$ telle que $\mu\left\{x \in X, \exists \lim_{n\to\infty} f_n^{k+1}(x)\right\} \geqslant \mu(X) - \frac{1}{k+1}$. Il est immédiat de vérifier que la suite $\{f_n^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, converge presque partout sur X vers une fonction mesurable $f(x)$, et que $f_n(x)$ converge en mesure vers $f(x)$. La convergence en mesure de la suite fondamentale de $M[0, 1]$ résulte de l'inégalité

$$\varrho(f, g) \geqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}\, \mu\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geqslant \sigma\},$$

qui est valable quel que soit $\sigma > 0$.

236. Procéder comme pour l'exercice 234.

237. Soit $\int\limits_X f(x)\,d\mu = A$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-ensemble E_1 de mesure finie dans X pour lequel $\int\limits_{E_1} f(x)\,d\mu > A-\varepsilon$. D'après le théorème de continuité absolue de l'intégrale, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\int\limits_E f(x)\,d\mu < \varepsilon$ pour tous les ensembles E de mesure $< \delta(\varepsilon)$. Le théorème d'Egorov nous dit que f_n converge uniformément vers f sur un sous-ensemble $E_2 \subset E_1$ tel que $\mu(E_1 \backslash E_2) < \delta(\varepsilon)$. Il existe d'autre part des numéros $n_1(\varepsilon)$ et $n_2(\varepsilon)$ tels que $\int\limits_{E_2} |f_N(x)-f(x)|\,dx < \varepsilon$ pour $N > n_1(\varepsilon)$ et $\left|\int\limits_X f_n(x)\,d\mu - A\right| < \varepsilon$ pour $N > n_2(\varepsilon)$. Soit $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. De ce qui précède il s'ensuit que

$$\int\limits_X |f_N-f|\,d\mu = \int\limits_{E_2} |f_N-f|\,d\mu + \int\limits_{X\backslash E_2} f_N\,d\mu + \int\limits_{X\backslash E_2} f\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \int\limits_X f_N\,d\mu - \int\limits_{E_2} f_N\,d\mu + \int\limits_X f\,d\mu - \int\limits_{E_2} f\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + 1 + \varepsilon - (1-3\varepsilon) + 1 - (1-2\varepsilon) = 7\varepsilon \quad \text{pour} \quad N > n(\varepsilon).$$

238. Soient $a \in \mathbf{R}$, $X_a = \{x \in X : f(x) \leqslant a\}$ et $p(a) = \mu(X_a)$. Alors $p(a)$ est une fonction non décroissante sur $\mathbf{R}$ et de plus $p(a) \to 0$ pour $a \to -\infty$ et $p(a) \to 1$ pour $a \to +\infty$.

Supposons par souci de simplicité que $p(a)$ est continue. Il existe alors une fonction inverse $g(t)$ définie sur $]0, 1[$ et telle que $p(g(t)) = t$. Montrons que $\inf\limits_{\mu(A)=t} \int\limits_A f(x)\,d\mu$ est réalisé pour $A = X_{g(t)}$. En effet, tout ensemble A de mesure t s'obtient à partir de $X_{g(t)}$ par élimination d'un sous-ensemble Y et adjonction d'un sous-ensemble $Z \subset X\backslash X_{g(t)}$ et de plus $\mu(Y) = \mu(Z)$.

Or $f \leqslant g(t)$ sur l'ensemble Y et $f > g(t)$ sur l'ensemble Z. Donc, l'ensemble A qui est la borne inférieure est défini de façon unique à un ensemble μ-négligeable.

Montrons maintenant que la fonction f sur X et la fonction g sur $]0, 1[$ sont équimesurables, c'est-à-dire $\mu_0(\{t \in]0, 1[: g(t) \leqslant a\}) = \mu(\{x \in X : f(x) \leqslant a\})$ pour tous les $a \in \mathbf{R}$, où μ_0 désigne la mesure ordinaire de Lebesgue sur l'intervalle $]0, 1[$. Le premier membre de cette relation est égal à $p(a)$, puisque l'inégalité $g(t) \leqslant a$ équivaut à $t \leqslant p(a)$. Le second membre est égal à $p(a)$ par définition.

De l'équimesurabilité de f et g il résulte que $\int\limits_0^1 \chi(g(t))\,dt = \int\limits_X \chi(f(x))\,d\mu(x)$ pour toute fonction borélienne χ. En particulier, en posant

$$\chi(h) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad h > a, \\ h & \text{pour} \quad h \leqslant a, \end{cases}$$

on obtient l'égalité voulue. Le cas d'une fonction p discontinue est laissé au soin du lecteur. (La fonction correspondante $g(f)$ présentera des intervalles de constance.)

239. Non.

240. Posons $f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; pour $x \neq 0$ on a $f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ et $\int\limits_0^1 f(x, y)\,dy = \dfrac{1}{x^2+1}$. Donc $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x, y)\,dy\right) dx = \dfrac{\pi}{4}$ et de façon analogue

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x, y)\,dx\right) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

241. Il est évident que les deux intégrales itérées sont nulles. Si l'intégrale double existait, elle existerait aussi sur l'ensemble $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ et l'on pourrait

appliquer le théorème de Fubini ; or pour $x \neq 0$ on a $\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+1)}$, et cette fonction n'est pas sommable sur]0, 1].

242. $$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\,dx\right) dy = 0, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\,dy\right) dx = 1.$$

243. Soient μ_0 la mesure de Lebesgue, μ une mesure quasiinvariante et X un borélien quelconque de la droite. Considérons l'ensemble $Y \subset \mathbf{R}^2$ composé des couples (x_1, x_2) pour lesquels $x_1 - x_2 \in X$. En appliquant à cet ensemble le théorème de Fubini du produit de mesures $\mu \times \mu_0$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_0(x_1 - X)\,d\mu(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(x_2 + X)\,d\mu_0(x_2).$$

De là on déduit que si $\mu_0(x_1 - X) = \mu_0(X) = 0$, alors $\mu_1(x_2 + X) = 0$ pour presque tous les x_2, donc que $\mu_1(X) = 0$. Si en revanche $\mu_0(X) \neq 0$, alors on aura à gauche $\mu_0(X)\,\mu_1(\mathbf{R})$, donc $\mu_1(x_2 + X) \not\equiv 0$, c'est-à-dire que $\mu_1(X) \neq 0$. Par suite les mesures μ et μ_0 sont équivalentes.

244. La variation de la charge ν_i est égale à $|\nu_i| = |f_i|\,\mu$. Donc les conditions $|\nu_1|(A) = 0$ et $|\nu_2|(A) = 0$ sont équivalentes si et seulement si les conditions $\mu(A \cap N_1) = 0$ et $\mu(A \cap N_2) = 0$ le seront. La dernière est réalisée pour tous les A si et seulement si $\mu(N_1 \triangle N_2) = 0$.

245. Le théorème de Radon-Nykodym nous dit que pour tout sous-ensemble A de mesure finie μ, il existe une fonction mesurable $\varrho_A(x)$ telle que $\nu(B) = \int_B \varrho_A(x)\,d\mu(x)$ pour tout sous-ensemble mesurable $B \subset A$. Supposons maintenant que $X = \cup X_i$, $\mu(X_i) < \infty$ et $\varrho_i = \varrho_{X_i}$. Il est immédiat de voir que les fonctions ϱ_i et ϱ_j sont confondues presque partout sur $X_i \cap X_j$. Il existe donc une fonction mesurable ϱ sur X confondue avec ϱ_i presque partout sur X_i. Cette fonction jouit de la propriété requise.

246. Supposons le contraire. Alors $\mu(A \cap [0, 1]) = 1/2$ et il existe un recouvrement de l'ensemble $A \cap [0, 1]$ par des intervalles disjoints $\{\Delta_n\}_{n=1,2,\ldots}$ tel que $\sum_n \mu(\Delta_n) < 1$. On obtient une contradiction :

$$\frac{1}{2} = \mu(A \cap [0, 1]) \leqslant \sum_n \mu(A \cap \Delta_n) < \frac{1}{2}.$$

247. Utiliser le théorème de Radon-Nykodym.

248. Se servir du fait que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est une fonction absolument continue (ceci résulte de l'absolue continuité de l'intégrale).

249. a) Conséquence immédiate des définitions. b) A l'aide de ces fonctions on peut approcher toute fonction φ de S. c), d) Les polynômes et les polynômes trigonométriques sont denses (même pour la convergence uniforme) dans l'espace des fonctions continues qui sont denses dans $L_1[0, 1]$ d'après b).

250. a) Résulte de la définition d'une métrique dans $L_1(\mathbf{R})$.

b) Remarquer que toute fonction à support borné constante par morceaux se laisse approcher pour la métrique de $L_1(\mathbf{R})$ par une fonction à support borné linéaire par morceaux et utiliser a).

c) Considérons l'ensemble L_0 des fonctions $f \in L_2(\mathbf{R})$ telles que $\int_R e^{-x^2} x^k f(x)\,dx = 0$ pour tous les k entiers non négatifs. Montrons que les fonctions f sont caractérisées par la condition :

$$\varphi_f(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2 + \lambda x} f(x)\,dx = 0$$

pour tous les $\lambda \in \mathbf{C}$. En effet, la sommabilité des fonctions $e^{-x^2+\lambda x}f(x)$ et $xe^{-x^2+\lambda x}f(x)$ entraîne la dérivabilité de $\varphi_f(\lambda)$ pour tous les $\lambda \in \mathbf{C}$, donc l'analyticité. Comme $\varphi_f^{(k)}(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}x^k f(x)\,dx$, les conditions $f \in L_0$ et $\varphi_f \equiv 0$ sont équivalentes. Soit $a(\lambda)$ une fonction sommable sur $\mathbf{R}$. Alors $0 = \int_{\mathbf{R}} a(\lambda)\,\varphi_f(i\lambda)\,d\lambda = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} a(\lambda)e^{-x^2+i\lambda x}f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}b(x)\,f(x)\,dx$, où $b(x) = \int_{\mathbf{R}} a(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$. Montrons que par un choix convenable de $a(x)$ on peut prendre pour $b(x)$ n'importe quelle fonction linéaire par morceaux continue. Il s'ensuivra que $e^{-x^2}f(x) = 0$ presque partout, donc que $f(x) = 0$ presque partout.

On remarquera que le produit de $a(\lambda)$ par $e^{i\lambda t}$ se traduit par une t-translation de $b(x)$. D'autre part, la correspondance entre $a(\lambda)$ et $b(x)$ est linéaire. Il suffit donc de prendre pour $b(x)$ une fonction élémentaire égale à 0 en dehors de $[-1, 1]$ et à $1-|x|$ sur $[-1, 1]$. Il s'avère qu'il suffit pour cela de prendre $a(\lambda) = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\sin^2 \lambda/2}{\lambda^2}$ (comparer avec l'exercice 668h)).

251. Montrer que l'ensemble des fonctions pour lesquelles est satisfaite la condition de continuité de la translation est fermé dans $L_1(\mathbf{R})$. Vérifier cette condition pour les fonctions à support borné continues.

252. a) Montrer que $f_1(t)f_2(x-t)$ est une fonction mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue sur le plan (x, t) et appliquer le théorème de Fubini pour les mesures σ-finies. On peut se dispenser du théorème de Fubini si l'on considère d'abord le produit de convolution sur l'ensemble, dense dans L_1, des fonctions à support borné continues, et ensuite le cas d'une fonction bornée $f_1(t) \in L_1$ et enfin l'on approche $f_1(t)$ par des fonctions bornées.

b) Considérer la relation

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant \sup f_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(t+h)-f_2(t)|\,dt.$$

253. Par hypothèse $\int_A f(x)\,dx = 0$ pour tout ensemble élémentaire A. L'intégrale étant une fonction de l'ensemble A complètement continue. Ceci est également vrai pour tous les ensembles mesurables. En particulier pour les ensembles $X_+ = \{x : f(x) > 0\}$ et $X_- = \{x : f(x) < 0\}$. Utiliser ensuite l'exercice 192b).

CHAPITRE 3

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES ET OPÉRATEURS LINÉAIRES

§ 1. Théorie générale

1. Topologie, convexité et semi-normes.

254. La translation et le produit par un scalaire sont des homéomorphismes dans un espace vectoriel topologique.

255. Pour tout voisinage W de 0 dans un e.v.t. il existe un voisinage U de 0 tel que $U-U \subset W$. Si $x \notin X$ il existe un voisinage W de 0 tel que $x+W \cap X = \varnothing$. Considérer les ensembles ouverts $X+U$ et $x+U$.

256. En faisant choix d'une base $\{e_i\}$ dans l'espace donné, on peut l'identifier à K^n. Montrons que toute norme p sur K^n est équivalente à la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$. En effet, $p(x) = p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, p(e_i) = C\,\|x\|$, où $C = \max_i p(e_i)$. D'autre part l'inégalité $|p(x)-p(y)| \leqslant p(x-y) \leqslant C\,\|x-y\|$ montre que p est continue sur K^n pour la topologie (ordinaire) définie par la norme $\|\cdot\|$. La boule $\|x\| = 1$ est fermée et bornée, donc compacte dans K^n. Soit $c = \min_{\|x\|=1} p(x)$. Alors $C\,\|x\| \geqslant p(x) \geqslant c\,\|x\|$, c.q.f.d.

257. Montrer par récurrence sur $\dim L$ que tout isomorphisme linéaire entre L et $K^{\dim L}$ est un homéomorphisme.

258. Considérer les injections des voisinages de 0.

259. a) $A+B = \bigcup_{x \in B} (A+x)$. Utiliser l'exercice 254.

b) Soit $a \notin A+B$. Alors pour tout $x \in B$ l'ensemble $x+A$ est fermé et par suite (voir exercice 255) il existe un voisinage $U(x)$ de 0 tel que $(a+U(x)) \cap (x+A) = \varnothing$. Les ensembles $x+\frac{1}{2}U(x)$ forment un recouvrement ouvert de B. Soit $\left\{x_i+\frac{1}{2}U(x_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$ un sous-recouvrement fini et $V = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{2} U(x_i)$. Montrer que $(a+V) \cap (A+B) = \varnothing$.

260. Pour chaque $t \in \mathbf{R}$ et chaque entier n posons $e_n(t) = e^{int}$, $f_n = e_{-n}+ne_n$, $n = 1, 2, \ldots$ On traitera ces fonctions comme des éléments de l'espace $L^2(]-\pi, \pi[)$.

Soient X_1 le plus petit sous-espace fermé de L_2 à contenir $e_0, e_1, \ldots$, X_2 le plus petit sous-espace fermé de L_2 à contenir $f_1, f_2, \ldots$ Montrer que X_1+X_2 est partout dense dans L_2, mais n'est pas fermé.

Par exemple le vecteur $x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e_{-n}$ appartient à L_2 mais pas à X_1+X_2. Voici un exemple plus simple : sur le plan réel, A est la droite $y = 0$, B, l'ensemble défini par $y > e^x$. Vérifier que $A+B$ est le demi-plan ouvert $y > 0$.

261. 262. Conséquence de la définition d'un ensemble convexe.

263. Voir indication de l'exercice 264. Réponse : $S = \mu(A)$, L est le périmètre de A.

264. Par souci de simplicité et de suggestion nous ferons la démonstration pour le cas de deux ensembles convexes sur le plan. Nous supposerons accessoirement que les ensembles convexes A_1 et A_2 sont limités par des courbes différentiables Γ_1 et Γ_2 ne possédant pas de tronçons rectilignes. Supposons que l'ensemble $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ est limité par la courbe Γ.

Paramétrisons les courbes Γ_1, Γ_2 et Γ d'une façon spéciale. Plus exactement à tout point $\tau \in [0, 2\pi[$ associons le point $(x_1(\tau), y_1(\tau)) \in \Gamma_1$ en lequel $x \cos\tau + y \sin\tau$ atteint son maximum lorsque (x, y) parcourt A_1. (En d'autres termes $(x(\tau), y(\tau))$ est le point de tangence de Γ_1 et de la droite d'appui qui fait un angle τ avec l'axe y.) On définit de façon analogue la représentation paramétrique $(x_2(\tau), y_2(\tau))$ de la courbe Γ_2 et la représentation paramétrique $(x(\tau), y(\tau))$ de la courbe Γ. Montrons maintenant que ces paramétrisations sont reliées entre elles par les relations

$$x(\tau) = \alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau),$$
$$y(\tau) = \alpha_1 y_1(\tau) + \alpha_2 y_2(\tau).$$

En effet,

$$\max_{(x, y) \in A} (x \cos\tau + y \sin\tau) = \max_{(x_i, y_i) \in A_i} [(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \cos\tau + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \sin\tau] =$$
$$= \max_{(x_i, y_i) \in A_i} [\alpha_1(x_1 \cos\tau + y_1 \sin\tau) + \alpha_2(x_2 \cos\tau + y_2 \sin\tau)] =$$
$$= \alpha_1 \max_{(x_1, y_1) \in A_1} (x_1 \cos\tau + y_1 \sin\tau) + \alpha_2 \max_{(x_2, y_2) \in A_2} (x_2 \cos\tau + y_2 \sin\tau),$$

d'où la relation voulue.

Il reste maintenant à se servir de la formule classique donnant l'aire d'un ensemble A limité par une courbe Γ définie sous forme paramétrique : $\mu(A) = \int_0^{2\pi} x(\tau)\, dy(\tau)$. On obtient $\mu(A) = \alpha_1^2 \mu(A_1) + \alpha_2^2 \mu(A_2) + 2\alpha_1\alpha_2 \cdot M(A_1, A_2)$, où $M(A_1, A_2) = \int_0^{2\pi} \frac{x_1 y_2' + x_2 y_1'}{2}\, d\tau$.

La dernière quantité s'appelle *surface mixte du couple d'ensembles* A_1 et A_2 au sens de Minkowski.

De façon analogue pour k ensembles convexes $A_1, \ldots, A_n$ du plan on a la relation

$$\mu(\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k) = \sum_{i,j} M(A_i, A_j)\alpha_i\alpha_j.$$

La marche de la démonstration est la même pour les ensembles d'un espace de dimension n ; La frontière ∂A de l'ensemble convexe A est paramétrisée par les points de la sphère unité S de $\mathbf{R}^n$; ensuite on se sert de la formule du volume :

$$\mu(A) = \int_S x_1(\tau)\, dx_2(\tau) \wedge \ldots \wedge dx_n(\tau).$$

Ceci fait apparaître la notion de *volume mixte* $M(A_1, \ldots, A_n)$ *d'une collection de* n *ensembles convexes dans* $\mathbf{R}^n$ en termes duquel sont exprimées de nombreuses caractéristiques géométriques des corps convexes.

265. Montrer que la topologie convexe nucléaire est définie par le système de toutes les semi-normes finies sur L.

a) $p_f = |f(x)|$ est une semi-norme pour toute fonctionnelle linéaire f sur L (pas forcement continue).

b) La fonctionnelle de Minkowski d'un ensemble convexe équilibré et absorbant est une semi-norme.

266. $B = \{x : p_B(x) \leqslant 1$, où p_B est la fonctionnelle de Minkowski de l'ensemble B' découpe sur toute droite passant par 0 un intervalle fermé pour la topologie euclidienne.

267. Considérer les ensembles $B_0 = \{x : p_B(x) < 1\}$ et $B_1 = \{x : p_B(x) \leqslant 1\}$, où p_B est la fonctionnelle de Minkowski de l'ensemble B.

268. Utiliser l'exercice 266.

269. $c_2(A)$ est un ensemble convexe. Utiliser ensuite l'exercice 262.

270. Une base de voisinages de 0 de l'ensemble semi-normé L est composée des ensembles $\{p_\alpha(x) < \varepsilon\}$, $\alpha \in A$, $\varepsilon > 0$.

271. Tout e.l.c. contient une base de voisinages de 0 composée d'ensembles convexes. S'agissant d'un contre-exemple pour les e.v.t. généraux voir l'exercice 321.

272. Montrer que pour la topologie de la convergence en coordonnées l'espace $\mathbf{R}^\infty$ est un espace localement convexe muni d'un système de semi-normes p_n, $n = 0, 1, \ldots$; $p_n(\{x_i\}_1^\infty) = |x_n|$; utiliser ensuite l'exercice 270.

273. Pour $r \geqslant 1$ la boule de rayon r est un ensemble convexe, puisque confondue avec $C(\mathbf{R})$. Pour $0 < r < 1$ la boule de rayon r n'est pas un ensemble convexe. En effet, supposons que $n = -[\log_2 r] \geqslant 1$. Alors la boule de rayon r contient le sous-espace V_n de $C(\mathbf{R})$ composé des fonctions nulles sur l'intervalle $[-n, n]$. Donc, cette boule ne peut être ensemble convexe que si avec toute fonction f elle contient la sous-variété linéaire $f + V_n$. Vérifier que ce n'est pas le cas pour la fonction constante $f \equiv \dfrac{v}{1-v}$.

274. Les boule $S_R = \{f \in C(\mathbf{R}), d(f, 0) \leqslant R\}$ pour $R < 1$ ne sont pas des ensembles absorbants, donc $C(\mathbf{R})$ n'est pas un e.v.t. pour cette topologie.

275. La fonction $p(f) = \sup |f(x)|$ est une norme sur $BC(\mathbf{R})$.

276. Montrer que la topologie de $\mathbf{R}^\infty$ définie par la métrique $d(\{x_n\}, \{y_n\})$ est une topologie de convergence en coordonnées (voir l'exercice 272).

2. Espaces duals.

277. Ceci resulte de la linéarité de la fonctionnelle et de l'invariance de la topologie d'un e.v.t. par translation.

278. a) Ramener l'exercice au cas où U est un voisinage équilibré de 0 ;

b) $\ker f$ est fermé, donc nulle part dense et par suite il existe un $x \in L$ et un voisinage équilibré V de 0 tels que $x + V \cap \ker f = \varnothing$. Montrer que $f(V) \not\ni -f(x)$ et utiliser a).

279. Utiliser la base de Hamel. On appelle *base de Hamel* un système $\{x_\alpha\}$ linéairement indépendant d'éléments d'un espace vectoriel L tel que son enveloppe linéaire soit confondue avec L. (Voir exercice 19.)

280. Le théorème de Hahn-Banach nous dit que la topologie de L pour laquelle sont continues toutes les fonctionnelles est confondue avec la topologie convexe nucléaire (voir exercice 265). Montrer que la puissance de la base de voisinages de 0 pour la topologie convexe nucléaire est 2^β, où β et la puissance de la base de Hamel (voir exercice 279) de l'espace L.

281. a) Si $|f(x)| \leqslant c$ sur la boule unité de l'espace L, alors $|f(x)| \leqslant c. \|x\|$ pour tous les $x \in L$, puisque f est homogène. Donc f est continue en 0 et par conséquent (voir exercice 277) partout. Inversement, si f est continue en 0, alors $|f(x)| \leqslant 1$ sur une boule ouverte de rayon $r > 0$ assez petit. La fonctionnelle f étant homogène il suit de là que $f(x) \leqslant r^{-1}$ sur la boule unité.

b) Si f est continue, elle est bornée sur un voisinage de 0 et par suite sur tout ensemble borné. Inversement, soit $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ une base de voisinages de 0 et supposons que la fonctionnelle f n'est bornée sur aucun de ces voisinages. Choisissons $x_n \in V_n$ tel que $|f(x_n)| > n$. Vérifier que $X = \{x_n\}$ est un ensemble borné.

282. $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$.

283. a) $b - a$; b) $\int\limits_a^b |y(t)|\, dt$; c) $\sum\limits_i |\lambda_i|$.

284. Vérifier que l'hyperplan $f(x) = 1$ ne contient pas de points x de norme $< \|f\|^{-1}$ c'est-à-dire de points dont la norme est aussi proche que l'on veut de $\|f\|^{-1}$.

285. Utiliser l'exercice 257.

286. Un espace de Banach B est réflexif si et seulement si la boule $\|x\| \leqslant 1$ es compacte pour la topologie faible.

287. $(c_0)' \supset l_1$ (en fait $(c_0)' = l_1$; voir exercice 293), donc la convergence faible entraîne la convergence sur les composantes. Considérer la suite $x_n(x_{ni} = 1,\ i \leqslant n, x_{ni} = 0,\ i > n)$ et prouver que la boule unité de c_0 n'est pas compacte pour la topologie faible.

288. Une base pour la topologie faible est composée d'ensembles non bornés pour la topologie forte.

289. Utilisons le fait évident $(l_1)' \supseteq l_\infty$ (en réalité $(l_1)' = l_\infty$, voir exercice 294). Soit $\{x_k^{(n)}\}$ une suite d'éléments de l_1 ne convergeant pas fortement vers 0. En passant à une suite partielle et en multipliant par une constante, on obtient $\|x^{(n)}\| \geqslant 1$ pour tous les n. On dira qu'une suite $\{x_n\} \in l_1$ est concentrée à ε près sur l'intervalle de la série naturelle $[k_1, l_1]$ si $\sum_{i=k}^{l} x_i \geqslant (1-\varepsilon)\|x\|$. Supposons que $x^{(n)} \to 0$ pour $n \to \infty$. Alors $x_k^{(n)} \to 0$ pour $n \to \infty$ pour tous les k. En passant encore une fois à une suite partielle on peut admettre que $x^{(n)}$ est concentrée à 1/4 près sur l'intervalle $[k_n, l_n]$ et de plus ces intervalles sont disjoints pour les différents n. Posons maintenant $a_i = \operatorname{sgn} x_i^{(n)}$ si $i \in [k_n, l_n]$ et $a_i = 0$ dans les autres cas. Alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^{(n)} \geqslant \sum_{i=k_n}^{l_n} |x_i^{(n)}| - \sum_{i \notin [k_n, l_n]} |x_i^{(n)}| \geqslant \frac{3}{4}\|x^{(n)}\| - \frac{1}{4}\|x^{(n)}\| \geqslant 1/2$. Ce qui contredit l'hypothèse $x^{(n)} \to 0$.

Remarque. Le résultat établi montre que la topologie d'un e.v.t. peut ne pas être définie par une classe de suites convergentes (bien que toute topologie soit définie par une classe de suites généralisées convergentes).

290. Montrer qu'un plan d'appui de la boule unité dans L est défini par une équation de la forme $f(x) = 1$, où $f \in L'$ et $\|f\| = 1$.

291. Considérons une face de dimension k et $k+1$ sommets x_i, $i = 1, \ldots, k+1$ de cette face (ces sommets existent, puisque tout polyèdre convexe est l'enveloppe linéaire de ses sommets). Associons à cette face l'ensemble $\{f \in B',\ f(x_i) = 1,\ i = 1, \ldots, k+1\}$. Montrer que cet ensemble est une face de dimension $(n-k-1)$ de B'.

292. Choisir une base dans P et la compléter en une base de $\mathbf{R}^n$.

293. Vérifier que la boule unité de c_0 ne possède pas de points extrêmes, et que la boule unité de c en possède deux : $x_n \equiv 1$ et $x_n \equiv -1$. L'isomorphisme entre l_1 et c_0' est défini par la formule $\langle\{a_n\}, \{x_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, celui des espaces l_1 et c' par la formule $\langle\{a_n\}, \{x_n\}\rangle = a_1 \lim_{n \to \infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x_n$. Pour le calcul de la norme de $\{a_n\}$ dans c' considérer des suites de la forme

$$x_i = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_{i+1} & \text{pour} \quad i < N, \\ \operatorname{sgn} a_i & \text{pour} \quad i \geqslant N. \end{cases}$$

294. Utiliser l'inégalité de Hölder.

295. Considérer sur $c \subset l_\infty$ la fonctionnelle continue $f(\{x_n\}) = \lim_{n \to \infty} x_n$ et appliquer le théorème de Hahn-Banach.

296. Choisir dans L_1' et L_2' des bases $\tilde{e}_i$, $i = 1, \ldots, n_1$ et $\tilde{f}_j$, $j = 1, \ldots, n_2$ respectivement biorthogonales à des bases e_i, $i = 1, \ldots, n_1$ et f_j, $j = 1, \ldots, n_2$ dans L_1 et L_2.

297. a) Dans l'espace $l_p(\mathbf{R})$, chaque intervalle fermé possède un « milieu » unique $\left(\text{en d'autres termes l'égalité } \|x-y\| = 2\|x-z\| = 2\|z-y\| \text{ pour } x \text{ et } y \text{ donnés est réalisée seulement au point } z = \frac{x+y}{2}\right)$.

b) Soit $\{x_n\}$ un ensemble dense dénombrable dans l'intervalle [0, 1]. Associer à une fonction $f \in C[0, 1]$ la suite $\{f(x_n)\} \in l_\infty(\mathbf{R})$.

298. a) Si L n'est pas réflexif et L' est séparable, la compacité de la boule unité $B \subset L$ a été prouvée dans la « Théorie » (théorème 12 chapitre III). Si L' n'est pas séparable la compacité résulte du théorème de Tikhonov. (Plonger B dans le produit d'intervalles

fermés $\prod_{f \in L'} I_f$ à l'aide de la formule $x \mapsto \{f(x)\}_{f \in L'}$ et vérifier que l'image de B est fermée, puisque $|f(x)| \leqslant \|f\|$.) Supposons maintenant que B est un compact pour la topologie faible. L'image canonique de B dans L'' sera alors compacte pour la topologie $*$-faible. Mais l'image de B est dense pour cette topologie dans la boule unité (puisqu'il n'existe pas d'hyperplan de la forme $f(x) = c$, $f \in L'$, $x \in L''$ séparant les points de la boule unité de L'' de l'image de B). Donc $L'' = L$.

b) Utiliser le résultat de a).

299. La boule unité de l'espace $C[a, b]$ possède deux points extrêmes : $f(x) \equiv 1$ et $f(x) \equiv -1$. Il s'ensuit d'après le théorème de Krein-Milman qu'elle n'est compacte pour aucune topologie.

3. Théorème de Hahn-Banach.

300. Utiliser l'exercice 257.

301. L'hyperplan séparateur doit être de la forme $f(x) = 0$, $f \in P'$. Montrer que $f \equiv 0$.

302. Supposons que A est compact ; il existe alors un voisinage V de 0 tel que $A + V \cap \cap B = \varnothing$ (cf. indication de l'exercice 255). Appliquer la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach à $A + V$ et B et utiliser encore une fois la compacité de A.

303. Fixons $x \in L$; du théorème de Hahn-Banach il s'ensuit qu'il existe $x^* \in L'$, $\|x^*\| = 1, (x^*, x) = \|x\|$.

304. L'isométrie $L \to L''$ construite dans l'exercice 303 est un isomorphisme puisque $\dim L = \dim L''$.

305. Pour X prendre la boule unité pour la topologie faible de l'espace dual.

306. Considérer la restriction de la fonctionnelle cherchée au sous-espace L_0 engendré par les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ et appliquer le théorème de Hahn-Banach.

307. Utiliser les coordonnées polaires.

308. Utiiiser la séparabilité de $l_q(n, \mathbf{R})$.

309. Soit L le sous-espace de $l_\infty(\mathbf{R})$ engendré par les suites de la forme $y_n = x_{n+1} - x_n$, $\{x_n\} \in l_\infty$. Montrer que la suite $y_n \equiv 1$ se trouve à une distance 1 de L. Appliquer ensuite le théorème de Hahn-Banach.

310. Voir indication de l'exercice 309.

311. $\tilde{p}(x) = \sup_n p(T^n x)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$

312. Pour α on peut prendre la puissance de l'espace L'. Le plongement de L dans $\mathbf{R}^\alpha$ est défini par la formule $x \mapsto \{f(x)\}_{f \in L'}$.

313. Soit L le sous-espace de $B(\mathbf{R}^n)$ engendré par les fonctions f telles que $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$ et par les fonctions de la forme $f(x+t) - f(x)$. Calculons la distance de L à la fonction $f \equiv 1$. Il est clair que cette distance est $\leqslant 1$. Supposons qu'elle est strictement inférieure à 1. Il existe alors des fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_N \in B(\mathbf{R}^n)$, des vecteurs $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{R}^n$ et un $\varepsilon > 0$ tels que

$$f_0(x) + \sum_{k=1}^{N} (f_k(x+t_k) - f_k(x)) \geqslant \varepsilon, \qquad (*)$$

et de plus $f_0(x) \to 0$ pour $\|x\| \to \infty$. Considérons le sous-groupe additif de $\mathbf{R}^n$ engendré par les vecteurs $t_1, \ldots, t_N$. Il est immédiat de vérifier qu'il isomorphe à $\mathbf{Z}^m$ pour un $m \leqslant N$. Soient $e_1, \ldots, e_m$ les générateurs de ce groupe. On peut admettre que tous les e_i sont positifs par rapport à une relation d'ordre sur $\mathbf{R}^n$ (voir exercice 14). De (*) il s'ensuit alors qu'il existe des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sur $\mathbf{Z}^m$ telles que $\varphi_0(z) \to 0$ lorsque $z_i \to +\infty$ pour tous les $i = 1, 2, \ldots, m$ et

$$\varphi_0(z) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z+e_j) - \varphi_j(z) \geqslant \varepsilon \quad \text{pour tous les} \quad z \in \mathbf{Z}^m. \qquad (**)$$

(Utiliser le fait que chaque vecteur t_k est une combinaison entière des vecteurs e_j de même que la relation $f(x+t_1+t_2) - f(x) = f(x+t_1) - f(x) + g(x+t_2) - g(x)$, où $g(x) = f(x+t_1)$.)

Désignons par T_j l'opérateur de translation de e_j : $T_j f(x) = f(x+e_j)$. De (**) il s'ensuit qu'il existe un M tel que

$$\sum_{j=1}^{m} (T_j - 1)\, \varphi_j(z) \geqslant \varepsilon/2 \quad \text{dès que} \quad z_i > M, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (***)$$

Nous allons montrer que (***) est contradictoire. A cet effet appliquons l'opérateur $\prod_{j=1}^{m} (1+T_j+ \ldots +T_j^{n-1})$ aux deux membres de cette relation. On obtient

$$\sum_{j=1}^{m} (T_j^n - 1) \prod_{k \neq j} (1+T_k+ \ldots +T_k^{n-1})\, \varphi_j(z) \geqslant n^m \cdot \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad z_i > M.$$

Si l'on désigne par C la plus grande des normes φ_j sur $B(\mathbf{Z}^m)$ on est conduit à l'inégalité

$$2n^{m-1}C \geqslant n^m \cdot \varepsilon/2$$

qui est mise en défaut pour $n > 4C/\varepsilon$.

Ainsi donc $d(1, L) = 1$. Et la fonctionnelle F définie sur $L+\mathbf{R}\cdot 1$ par la formule $F(f+\lambda) = \lambda$, pour $f \in L$, est de norme 1. En la prolongeant d'après le théorème de Hahn-Banach à $B(\mathbf{R}^n)$ on obtient une fonctionnelle LIM. Cette fonctionnelle s'appelle *limite de Banach* (qui le premier l'a mise en évidence). A noter que les propriétés a), b) et c) ne définissent pas la fonctionnelle LIM de façon unique (contrairement à la limite ordinaire). Cf. exercice 114.

314. Soit $\mathbf{Z}^n$ un réseau de $\mathbf{R}^n$ engendré par une base canonique. Définissons une mesure μ par la formule

$$\mu(A) = \mathrm{LIM}\left(\sum_{z \in \mathbf{Z}^n} x_{A+z}\right),$$

où LIM est la limite définie dans l'exercice 313.

315. Appliquer le théorème de Hahn-Banach.

316. Voir indication du problème 315.

317. Considérer l'hyperplan $(x, f_i) = 1$, où f_i est un ensemble dénombrable partout dense dans la boule unité de $L_q(n, \mathbf{R})$ $(1/p+1/q = 1)$ et utiliser l'exercice 284.

318. On peut admettre que l'ensemble convexe V contient 0 et que l'intersection de V avec toute droite passant par 0 est un ensemble fermé. La frontière de V définit en coordonnées polaires (r, φ) le graphe d'une fonction convexe $r(\varphi)$, donc $r(\varphi)$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et telle que $r(0) = r(2\pi)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polygone $V_n(\varepsilon)$ tel que $|r(\varphi) - \tilde{r}(\varphi)| < \varepsilon$, où $\tilde{r}(\varphi)$ est une fonction définissante la frontière de $V_n(\varepsilon)$. $V_n(\varepsilon)$ est défini par l'intersection des demi-plans de la forme $a_i x + b_i y \leqslant 1$. Considérer l'immersion φ : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$: $(x, y) \to x\bar{a} + y\bar{b}$, où $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

319. Voir evercices 306, 454.

320. Raisonnons d'abord par récurrence sur le nombre d'ensembles. Supposons que $N > n+2$ et que la proposition a été prouvée pour $N-1$ ensembles. Si $X_1, \ldots, X_N$ vérifient l'hypothèse du théorème alors $N-1$ quelconques d'entre eux possèdent un point commun d'après l'hypothèse de la récurrence. Posons $Y_i = X_i \cap X_N$, $1 \leqslant i \leqslant N-1$. Alors $N-2$ ensembles quelconques Y_i possèdent un point commun. Comme $N-2 \geqslant n+1$, la famille Y_i vérifie de nouveau l'hypothèse du théorème. Donc, tous les Y_i possèdent un point commun qui le sera aussi pour tous les X_i. Reste à traiter le cas où $N = n+2$. Raisonnons maintenant par récurrence sur la dimension. Supposons que le théorème a été prouvé pour les dimensions $< n$ et considérons les ensembles X_i, $1 \leqslant i \leqslant n+2$ dans $\mathbf{R}^n$ qui $n+1$ à $n+1$ possèdent un point commun. Si X_{n+2} ne rencontre pas l'intersection $Z = \bigcap_{i=1}^{n+1} X_i$ il existe un hyperplan L séparant ces deux ensembles convexes. n ensembles quelconques de X_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$ possèdent un point commun avec X_{n+2} et avec Z. Donc, ils en possèdent un avec L. Posons $Y_i = X_i \cap L$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. En identifiant L à $\mathbf{R}^{n-1}$ on constate que

$\bigcap_{i=1}^{n+1} Y_i$ n'est pas vide par hypothèse de la récurrence. Ce qui contredit la définition de L comme $\bigcap_{j=1}^{n+1} Y_i = Z \cap L$. Reste à vérifier le théorème pour $n = 0$.

Remarque. Par des raisonnements topologiques on montre que la condition de convexité dans le théorème de Helly peut être remplacée par la condition suivante : tous les ensembles de la forme $X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}$ pour $k \leqslant n+1$ sont homotopiquement équivalents à un point (c'est-à-dire se contractent en un point).

321. Montrer que l'enveloppe convexe de l'ensemble U_ε est confondue avec l'espace $C[0, 1]$ tout entier. D'où la proposition de l'exercice. Soit $\{\varphi_i\}$, $0 \leqslant i \leqslant n$ un système de fonctions continues sur $[0, 1]$ tel que : 1) $0 \leqslant \varphi_i(x) \leqslant 1$; 2) $\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \equiv 1$, 3) $\operatorname{supp} \varphi_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. (On peut poser par exemple $\varphi_i(x) = (1-|i-nx|)_+$.) Pour toute fonction $f \in C[0, 1]$ on a $f = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i f$. Donc f appartient à l'enveloppe convexe des fonctions $\psi_i = (n+1)\varphi_i f$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$. Montrons que pour n assez grand toutes les fonctions ψ_i appartiennent à U_ε. Ceci résulte de la majoration

$$\sqrt{|\psi_i|}\, dx = \sqrt{n+1} \int_{\frac{1-i}{n}}^{\frac{1+i}{n}} \sqrt{|\varphi_i f|}\, dx \leqslant \frac{2\sqrt{n+1}}{n} \sqrt{\|f\|}.$$

322. a) L' sépare les points de L.

b) Prouver la continuité de $F(f)$ en utilisant la relation

$$\left| \int_X F(f(x))\, d\mu(x) \right| \leqslant \int_X |F(f(x))|\, d\mu(x) \leqslant \|F\| \int_X \|f\|\, d\mu(x),$$

4. Espaces de Banach.

323. $\{x : \|x\|_p \leqslant 1\}$ n'est pas un ensemble convexe pour $0 < p < 1$.

324. Considérer l'ensemble des suites à support borné à coefficients rationnels.

325. Considérer l'ensemble des suites d'éléments 0 et 1.

326. Pour montrer qu'une suite fondamentale converge, il suffit de prouver qu'une de ses suites partielles converge. Utiliser la suite partielle « rapidement convergente » $\{x_{n_k}\}$ pour laquelle $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leqslant \frac{1}{2^k}$.

327. Pour montrer que $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ utiliser le fait que L_0 est fermé dans L.

328. Extraire d'une suite $\{y_n\}$, fondamentale dans L_1, une suite partielle $\{y_{n_k}\}$ telle que $\sum \|y_{n_k} - y_{n_{k+1}}\|_{L_1} < \infty$.

Poser $\alpha_k = y_{n_k} - y_{n_{k+1}}$ et choisir $a_k \in \varphi^{-1}(\alpha_k)$ (φ est l'application quotient $L \to L_1$) tel que $\|a_k\|_L \leqslant \|\alpha_k\|_{L_1} + 2^{-k}$. Considérer $S_k = a_1 + \ldots + a_k$. Montrer que $\lim y_k = \lim S_k + L_0$.

329. Soit φ une application quotient de L sur L_1, z_n une suite fondamentale dans L_1. Alors $y_n = \varphi(z_n)$ est une suite fondamentale dans L_1 et par suite il existe $y = \lim y_n$, d'où $\|y - y_1\|_{L_1} \to 0$, donc il existe $r_n \in \varphi(y - y_n) = \varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y_n)$ tels que $\|r_n\|_L \to 0$. Fixons un élément f dans $\varphi^{-1}(y)$; alors $r_n = f - f_n$, $f_n \in \varphi^{-1}(y_n)$. Donc $f_n \to f$, mais $z_n \in \varphi^{-1}(y_n)$, donc $f_n - z_n = x_n$ est une suite fondamentale dans L_0.

En définitive, $\lim z_n = f - x$, $x = \lim x_n$ existent, et par suite L est un espace de Banach.

330. Soient X un espace de Banach séparable, $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ un ensemble dénombrable partout dense dans la boule unité de X.

Définissons une application $l_1(K) \mapsto X$ en posant $A : \{\alpha_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, $\{\alpha_n\} \in l_1(K)$.

a) Montrer que A est correctement définie et est continue.

b) Pour x, $||x|| = 1$, donné choisir $x_{n(i)}$ tel que $\left\| x - \sum_{i=1}^{k} 2^{-i-1} x_{n(i)} \right\| \leqslant 2^{-k}$. D'où $\operatorname{im} A = X$.

c) En remplaçant dans cette majoration 2 par 3, 4, ... montrer que $\hat{A} : \varphi/\ker A \to X$ est une isométrie.

331. La condition nécessaire est évidente. Pour démontrer la condition suffisante utiliser le lemme de Zorn ; il suffit de prouver l'existence d'un ensemble non dénombrable de boules disjointes de rayon ε, ε étant un nombre quelconque > 0.

332. Utiliser l'exercice 257.

333. On peut énoncer cet exercice sous la forme suivante : parmi les polynômes de degré n de coefficient supérieur 1 trouver celui qui a la plus petite norme dans l'espace $C[-1, 1]$ (ce polynôme s'appelle polynôme s'écartant le moins de 0 sur l'intervalle $[-1, 1]$. Solution (Tchébychev). Considérer le polynôme $T_n(x) = 2^{1-n} \cos (n \arccos x)$. Vérifier par récurrence que T_n possède un coefficient supérieur égal à 1, une norme égale à 2^{1-n} et prend alternativement les valeurs $\pm 2^{1-n}$ aux points $x_k = \cos \dfrac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Par ailleurs si P est un autre polynôme de degré n de coefficient supérieur 1 s'écartant de 0 d'une quantité inférieure à 2^{1-n}, alors les graphes de P et T_n se coupent au moins en n points (car la différence $P - T_n$ change de signe quand on passe de x_k à x_{k+1}). Or ceci est impossible puisque $P - T_n$ est un polynôme de degré n, donc ne possède pas plus de $(n-1)$ zéros.

334. L'application quotient $\varphi : L \to L/L_0$ envoie la boule unité ouverte de L dans la boule unité ouverte de L/L_0.

335. Choisir une suite de 1/2-perpendiculaires y_n à $L(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

336. Supposons qu'il existe une 0-perpendiculaire x_1 à l'espace $L_0 = \{x_0 \in L : f(x_0) = 0\}$. Ceci revient à affirmer que $||x_1 + x_0|| \geqslant ||x_1||$ pour tous les $x_0 \in L_0$. Autrement dit la distance $d(x_1, L_0)$ est réalisée et vaut $||x_1||$. Tout vecteur $x \notin L_0$ se représente par $x = \alpha(x_1 + x_0)$, où $\alpha \in R\backslash\{0\}$, $x_0 \in L_0$.

On a

$$\frac{|f(x)|}{||x||} = \frac{|\alpha|\,|f(x_1)|}{|\alpha|\,||x_1 + x_0||} \leqslant \frac{|f(x_1)|}{||x_1||}.$$

Donc la norme de f est réalisée sur le vecteur x_1. La réciproque s'établit de façon analogue.

337. Utiliser le fait suivant : le sous-espace $L_0 \subset L$ est complémentable si et seulement s'il est de la forme $L_0 = P \cdot L$, où P est un projecteur continu. (Cf. exercices 354, 355). Explicitons ce projecteur dans les cas mentionnés dans l'exercice.

a) Supposons que L_0 est engendré par des vecteurs linéairement indépendants $e_1, \ldots, e_n$. Désignons par $f_1, \ldots, f_n$ une collection de fonctionnelles linéaires de L' telles que $f_i(e_j) = \delta_{ij}$(*). Alors pour P on peut prendre l'opérateur $x \to \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$.

b) Supposons que L_0 est défini par un système d'équations $f_1(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$, où f_i sont des fonctionnelles linéairement indépendantes de L'. Choisissons $e_1, \ldots, e_n$ tels que soit réalisée (*). Le projecteur P est alors défini par la formule $P(x) = x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$.

c) Soient $\{e_i\}$ une famille de vecteurs unitaires dans $l_\infty(K)$, f_i la famille duale de fonctionnelles linéaires pour laquelle est réalisée (*). Prolongeons f_i en conservant la norme en une fonctionnelle $\tilde{f}_i$ sur L. Le projecteur cherché P est de la forme $P(x) = \{f_i(x)\} \in l_\infty(K)$.

d) Soient e_i une base standard dans $l_1(K)$, $\tilde{e}_i$ une contre-image de e_1 dans L telle que $||\tilde{e}_i|| \leqslant 2$. Le projecteur cherché peut être défini par la formule : $P(x) = x - \sum_{i=1}^{\infty} c_i \tilde{e}_i$, où $\{c_i\} \in l_1(K)$ est l'image de x dans l'espace quotient L/L_0.

338. La transformation linéaire $y \mapsto y - \dfrac{2f(y)}{f(x)} x$ s'appelle réflexion dans l'hyper-

plan $f = 0$ parallèlement à un vecteur x qui n'est pas situé dans f. Vérifier que cette transformation est une isométrie de $l_p(n, \mathbf{R})$ pour $p \neq 2$ si et seulement si x est un vecteur de base standard (au signe près) et f la fonctionnelle de base duale. Donc, les vecteurs $\pm e_k$ se transforment en eux-mêmes par toute isométrie de $l_{p_1}(n, \mathbf{R})$ dans $l_{p_2}(n, \mathbf{R})$. Or $d_p(\pm e_k, \pm e_j) = 2^{1/p}$. Donc l'isométrie cherchée n'existe que pour $p_1 = p_2$.

339. a) Vérifier que la formule citée dans l'exercice définit bien une norme et que cette dernière majore toute norme tensorielle croisée.

b) Vérifier que la formule exhibée définit une norme et que cette dernière est majorée par toute norme tensorielle croisée uniforme.

340. a) Il faut vérifier que dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} & L_1 \otimes L_2 \arrow[d, dashed, "B"] \\ L_1 \times L_2 \arrow[ur, "A_0"] \arrow[r, "A"'] & L \end{tikzcd}$$

l'application B peut être définie de façon unique de telle sorte que ce diagramme soit commutatif. L'application B étant linéaire et $L_1 \otimes L_2$ engendré par des éléments de la forme $x \otimes y = A_0(x, y)$ l'unicité est évidente. L'existence de B résulte de ce que la formule $\tilde{B}(x \square y) = A(x, y)$ définit une application linéaire de $L_1 \square L_2$ dans L envoyant $L_1 \circ L_2$ dans 0 (on se sert des notations du § 1, chapitre III ; voir aussi l'exercice 61). Donc B engendre l'application cherchée $B : L_1 \otimes L_2 \to L$.

b) Dans les indications de l'exercice 339 a) vérifier que $\|B\| \leqslant 1$.

341. On remarquera que les transformations orthogonales Q_i des espaces L_i, $i = 1, 2$, envoient la matrice A dans la matrice $Q_1 A Q_2$, les valeurs propres des matrices $A'A$ et AA' restant invariantes. Ceci montre qu'il suffit de résoudre cet exercice pour une matrice diagonale de la forme : $a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, où $\lambda_i \geqslant 0$. Dans ce cas $s_i = \lambda_i^2$ pour $i \leqslant \min(m, n)$ et $s_i = 0$ pour les autres i. Soient $\{e_j\}$ et $\{f_j\}$ des bases standard dans L_1 et L_2. Il reste à vérifier que $\hat{p}\left(\sum_{j=1}^{\min(m,n)} \lambda_j e_j \otimes f_j\right) = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} \lambda_j$. Que la norme soit majorée par le nombre indiqué est évident, car $p(e_j \otimes f_j) = 1$. Pour la minoration, considérons la fonctionnelle $F = \sum e_j^* \otimes f_j^*$, où x^* désigne la fonctionnelle linéaire $x^*(y) = (x, y)$. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski pour vérifier que $\|F\| = 1$ (il suffit de vérifier que $F(x \otimes y) \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$). On a $F\left(\sum_j \lambda_j e_j \otimes f_j\right) = \sum_j \lambda_j$, ce qui n'est autre que la minoration cherchée. 1

342. Utiliser la forme explicite de la norme sur $L_1 \otimes L_2$ (voir exercice 339).

343. L'espace $L_1' \otimes L_2$ s'identifie à l'espace des opérateurs de rang fini par les applications

$$x \otimes y \to A_{x,y} \in L(L_1, L_2) : \ A_{x,y}(z) = (x, z)y, \qquad x \in L_1', \qquad y \in L_2, \qquad z \in L_1.$$

Montrer que la norme sur $L_1 \otimes L_2$ est confondue avec la norme ordinaire d'un opérateur (voir indication de l'exercice 342).

344. Montrer que la norme sur $l_1(mn, \mathbf{R})$ est une cross-norme pour les normes sur $l_1(n, \mathbf{R})$ et $l_1(m, \mathbf{R})$ et appliquer l'exercice 339a). Voir également l'indication des exercices 339 et 340.

345. Montrer que la norme sur $l_\infty(mn, \mathbf{R})$ est une cross-norme pour la norme sur $l_\infty(n, \mathbf{R})$ et $l_\infty(m, \mathbf{R})$ et appliquer l'exercice 339b).

§ 2. Opérateurs linéaires

1. Espace des opérateurs linéaires.

346. b) et c).

347. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2(\mathbf{R})$; alors $A_n x = x_n e_1 \to 0$.

348. $(y, B_n x) = (x_1, y_n)$ où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots) \in l_2(\mathbf{R})$.

349. $A_nB_n - AB = A_nB_n - A_nB + A_nB - AB = (A_n - A)B + A_n(B_n - B)$.

350. Utiliser le théorème de Banach-Steinhauss.

351. Voir indication des exercices 349 et 350.

352. L'ensemble de semi-normes

$$p_x(A) = \|Ax\|, \qquad A \in \operatorname{End} L, \qquad x \in L$$

définit une base pour la topologie forte sur End L.

Il suffit de vérifier que le produit est continu en (0, 0) où 0 est l'opérateur nul dans End L.

353. Voir exercices 347 et 348.

354. Soit P un projecteur sur L_1 parallèlement à L_2. Alors $1-P$ est un projecteur sur L_2 parallèlement à L_1. Si P est continu, alors L_1 et L_2 sont fermés, puisque $L_1 = \ker(1-P)$, $L_2 = \ker P$. Réciproquement si L_1 et L_2 sont fermés, la continuité de P résulte du théorème de Banach de l'opérateur inverse. (Considérer l'application naturelle $Q : L_1 \to L/L_2$ et mettre P sous la forme $Q^{-1} \circ \pi$, où π est un projecteur de L sur L/L_2).

355. L'égalité $P^2 = P$ entraîne que $L = L_1 + L_2$ (somme algébrique directe), où $L_1 = P \cdot L$, $L_2 = (1-P)L$. Utiliser ensuite le résultat de l'exercice précédent.

356. $\|AB\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|ABx\| \leqslant \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|A\| \, \|Bx\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.

357. Modifier la démonstration du théorème 4, chapitre III.

358. $\|A\| = \operatorname{ess\,sup}\limits_{x \in X} |a(x)|$.

359. Si $p \geqslant q$ l'inégalité de Hölder nous donne

$$\left(\int_a^b |f|^q \, dx\right)^{1/q} \leqslant (b-a)^{1/q - 1/p} \left(\int_a^b |f|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Réponse : $(b-a)^{1/q - 1/r}$.

360. Si $p \geqslant q$, alors $a(x) \in L_\infty(]0, 1[)$; $a(x) \equiv 0$ pour $p < q$.

361. a) Vérifier que $\|f(x+t) - f(x)\|_{L_p} \to 0$ pour $t \to 0$ pour les fonctions continues à support compact.

b) $\|T(t') - T(t'')\| = 2$ pour $t' \neq t''$.

362. Vérifier que $A(t) = e^{tC}A_0$ est bien la solution (pour cela établir l'égalité $(e^{tC})' = Ce^{tC}$). Utiliser ensuite le théorème d'unicité de la théorie des équations différentielles ordinaires.

363. Si $A(t)$ est différentiable, le résultat découle de l'exercice précédent. Déduisons la différentiabilité de $A(t)$ à partir de sa continuité. On remarquera que $A(0) = 1$. Supposons que ε est un nombre positif assez petit pour que $\|A(t) - 1\| < 1$ pour $|t| < \varepsilon$, et φ une fonction lisse non négative concentrée sur l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ pour laquelle $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(t)\, dt = 1$. Alors l'opérateur $\Phi = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} A(-s)\, \varphi(s)\, ds$ est inversible, car $\|1 - \Phi\| < 1$. Vérifier que la fonction opératorielle $\tilde{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(s)\, \varphi(t-s)\, ds$ est différentiable.

364. $A(s) : L_2(R) \to L_2(\mathbf{R})$, $A(s)\, x(t) = x(t+s)$, $x(t) \in L_2(\mathbf{R})$.

365. Supposons que $\|x_n\| \to 0$ et que $\|Ax_n\| \not\to 0$; il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ tels que $\|Ax_{n_k}\| \geqslant \varepsilon$. La convergence $\|x_{n_k}\| \to 0$ entraîne l'existence de $\alpha_{n_k} \to \infty$ tels que $\alpha_{n_k} x_{n_k} \to 0$. Alors de $\|A\alpha_{n_k} x_{n_k}\| \to \infty$ il s'ensuite que $\{A\alpha_{n_k} x_{n_k}\}$ ne converge pas faiblement.

366. Dans les espaces de Banach chaque ensemble faiblement borné est fortement borné ; dire qu'un opérateur est continu revient à dire qu'il est borné.

367. $A' : L_{q'}[0, 1] \to L_{p'}[0, 1]$, $\quad A'f(x) = \int_0^1 K(y, x)\, f(y)\, dy$.

368. $P'F(t) = \begin{cases} F(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ F(1), & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$

2. Ensembles compacts et opérateurs compacts.

369. a) $\Rightarrow$ b). Supposons que A est compact et soit $\{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ une suite généralisée. Si $\{y_\alpha\}$ ne possède pas de points d'accumulation pour tout $x \in A$ il existe un ensemble ouvert $V_x \ni x$ et un $\alpha_x \in I$ tel que $y_\alpha \notin V_x$ pour $\alpha > \alpha_x$. La famille $\left\{V_x\Big|_{x \in A}\right\}$ est un recouvrement ouvert de S. En extrayant un sous-recouvrement fini de $\left\{V_x\Big|_{x \in A}\right\}$ on obtient une contradiction.

b) $\Rightarrow$ a). Supposons qu'un recouvrement ouvert U ne possède pas de sous-recouvrement fini et ordonnons par inclusion l'ensemble W des sous-familles finies de la famille U. Aboutir à une contradiction en considérant la suite généralisée $\{x_F\}$, où $F = \{F_1, \ldots, F_n\} \in W$ et $x_F \notin \bigcup_{i=1}^{n} F_i$.

a) $\Leftrightarrow$ c). Soient V un système quelconque de sous-ensembles fermés de A et $U = \{A - F\,;\, F \in V\}$. Alors V centrée $\Leftrightarrow$ U ne possède pas de sous-recouvrements finis et $\bigcap_{F \in V} F \neq \varnothing \Leftrightarrow U$ n'est pas un recouvrement de A.

370. L'ensemble triadique de Cantor X est recouvert par 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} et ne peut être recouvert par un nombre inférieur d'intervalles de cette longueur. Donc pour $\varepsilon = 3^{-n}/2 N(\varepsilon) = 2^n$. Donc, $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-\log_3 2})$ et la dimension approchée est égale à $\log_3 2 \approx 0{,}63$.

371. La condition que A est un sous-ensemble extrême de K s'exprime ainsi : si $x \in K$, $y \in K$, $x \neq y$ et $(x+y)/2 \in A$, alors $x \in A$ et $y \in A$.

372. Soit P la famille de toutes les parties compactes extrêmes de K. Comme $K \in P$, on a $P \neq \varnothing$. Ordonnons (partiellement) P par inclusion. De l'exercice 369 il résulte que tout sous-ensemble ordonné dans P est minoré (par l'intersection). D'après le lemme de Zorn P contient un plus petit élément.

373. Supposons que A contienne au moins deux points et que $f \in L'$ est une fonctionnelle linéaire séparant ces points. Soient $c = \max_{x \in K} f(x)$ et $B = \{x \in A : f(x) = c\}$. Montrer que B est un sous-ensemble extrême strictement contenu dans A.

374. Résulte des exercices 372 et 373.

375. Soient H l'enveloppe convexe des points extrêmes du compact K, $\bar{H}$ l'adhérence de H. Si $x_0 \in K \backslash \bar{H}$, il existe un hyperplan $f(x) = c$ séparant x_0 et $\bar{H}$: $f(x) > c$ sur x_0 et $f(x) \leqslant c$ sur $\bar{H}$. En déduire que K contient un point extrême n'appartenant pas à H (cf. indication de l'exercice 373).

376. Si $1 < p < \infty$ alors la boule unité est un corps strictement convexe et toute sa frontière est composée de points extrêmes. Si $p = 1$ les points extrêmes sont $\pm e_j$, où $\{e_j\}$ est une base standard dans $l_1(n, \mathbf{R})$. Si $p = \infty$, les points extrêmes sont les vecteurs de la forme $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon e_j$, où $\varepsilon_j = \pm 1$.

377. La boule unité de l'espace c_0 ne possède pas de points extrêmes. Dans l'espace ℓ la boule unité en possède deux :

$$(1, 1, \ldots, 1, \ldots) \quad \text{et} \quad (-1, -1, \ldots, -1, \ldots).$$

378. Appliquer le théorème de Krein-Milman (exercice 375).

379. Soit M un ensemble précompact. Il possède alors un $\varepsilon/3$-réseau $\{f_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Le compact X peut être représenté par la réunion d'un nombre fini de parties de diamètre $< \varepsilon/3$. Donc, pour tout i il existe une partition de T en un nombre fini de parties sur lesquelles l'oscillation de f_i est $< \varepsilon/3$. En faisant le produit de ces partitions on obtient une partition de T en $\{T_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sur lesquelles l'oscillation de f_i est $< \varepsilon/3$ pour tous les i et j. Si maintenant f est une fonction quelconque de M et f_i le point de $\varepsilon/3$-réseau le plus proche de f, t et s des points quelconques de T_j, alors $d_X(f(t), f(s)) \leqslant d_X(f(t), f_i(t)) + d_X(f_i(t), f_i(s)) + d_X(f_i(s), f(s)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Ce qui prouve la condition nécessaire.

Soit donné maintenant $\varepsilon > 0$ et supposons qu'il existe une partition $T = \prod_{j=1}^{n} T_j$ telle que $\omega_f(T_j) < \varepsilon/4$ pour tous les $f \in M$. (Ici $\omega_f(T_j)$ représente l'oscillation de la fonction f sur l'ensemble T_j.) Choisissons dans chaque ensemble T_j un point t_j et considérons l'application $\varphi : M \to X^n$: $f \mapsto (f(t_1), \ldots, f(t_n))$. L'ensemble X étant un compact, il en est de même de X^n $\left(\text{la distance dans } X^n \text{ est définie par } d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_X(x_i, y_i)\right)$. Donc l'image de M est un ensemble précompact. Choisissons dans $\varphi(M)$ un $\varepsilon/2$-réseau $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)$. Alors $f_1, \ldots, f_n$ est un ε-réseau pour M. En effet, si f est une fonction quelconque de M et $\varphi(f_i)$ le point de l' $\varepsilon/2$-réseau le plus proche de $\varphi(f)$, alors pour $t \in T_j$ on aura

$$d_X(f(t), f_i(t)) \leq d_X(f(t), f(t_j)) + d_X(f(t_j), f_i(t_j)) + d_x(f_i(t_j), f_i(t)) < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon.$$

380. Montrer que l'ensemble S ne peut admettre pour point extrême qu'une matrice A contenant 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne. (Dans le cas contraire A contiendrait une sous-matrice A_0 d'ordre 2 dont trois éléments au moins seraient positifs. Considérer l'intersection de S avec l'ensemble des matrices qui ne diffèrent de A qu'à l'extérieur de A_0.) Les matrices A jouissant de cette propriété se déduisent l'une de l'autre par permutation des lignes et des colonnes, c'est-à-dire par des transformations isométriques de S. Donc, elles sont toutes extrêmes (dans le cas contraire il n'existerait pas de points extrêmes).

381. Voir exercice 335 ou le théorème 11.

382. Les opérateurs compacts forment un idéal dans End (L).

383. Si $a_i \to 0$, alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |a_n| < \varepsilon$. Considérer $K = \left\{\{x_i\} \in l_p(\mathbf{R}) : \left|\frac{x_i}{a_i}\right| \leq 1\right\}$ (on peut admettre que $a_i \neq 0$ et $K_N = K \cap L(e_1, \ldots, e_N)$. Choisir un ε-réseau $x_1, \ldots, x_m$ dans K_N et montrer que c'est un 2ε-réseau pour K. L'opérateur A est compact si et seulement si K l'est.

384. L'opérateur $Af = xf$ est inversible sur le sous-espace de dimension infinie $L = \left\{f \in C[0, 1], f\big|_{[0, 1/2]} = 0\right\}$.

385. Supposons que A' est un opérateur compact. Alors A'' est aussi compact. Donc, l'ensemble $A''S''$, où S'' est la boule unité fermée de l'espace L_1'', est précompact. L'espace L_2 peut être isométriquement plongé dans L_2''. En identifiant L_2 à son image dans L_2'' par ce plongement, on obtient $AS \subseteq A''S''$, et par suite l'ensemble AS est précompact pour la topologie forte de L_2'', donc, pour la topologie forte de L_2.

386. Appliquer le théorème de Weierstrass à la fonction $K(x, y)$.

387. Si $\{\varphi_i\}$ et $\{\psi_j\}$ sont des systèmes orthonormés complets dans $L_2(X, \mu)$ et $L_2(Y, \nu)$, alors $\{f_i\psi_j\}$ l'est aussi dans $L_2(X \times Y, \mu \times \nu)$.

388. L'opérateur T commute avec les opérateurs de dilatation $A_\alpha f(x) = f(\alpha x)$. Ceci nous suggère le changement de variables $\tau = \ln x$. Posons $\varphi(\tau) = f(e^\tau)e^{\tau/p}$. Alors $f(t) = \varphi(\ln t) \times t^{-1/p}$ et la correspondance $f \leftrightarrow \varphi$ est une isométrie de $L_p(]0, \infty[)$ dans $L_p(\mathbf{R})$. L'image de l'opérateur T dans $L_p(\mathbf{R})$ est

$$\tilde{T}\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \varphi(\sigma) e^{\frac{\sigma - \tau}{q}}\, d\sigma,$$

où $q = \dfrac{p}{p-1}$ est le conjugué de p. Pour calculer la norme de T utiliser les propriétés des opérateurs de convolution (cf. chapitre IV) et ramener $\tilde{T}$ au produit par une fonction. Une voie plus directe consiste à redéfinir $\tilde{T}$ sous la forme $\tilde{T} = \int_{-\infty}^{0} e^{\sigma/q} T_\sigma\, d\sigma$, où $T_\sigma\varphi(\tau) = \varphi(\sigma + \tau)$ et à utiliser le fait que $\|T_\sigma\| = 1$. Réponse : $\|T\| = q$. Pour démontrer

que $\tilde{T}$ n'est pas compact considérer une famille de fonctions $\varphi_n = n^{1/r}\chi_{[-n,n]}$ est vérifier que $\varphi_n \rightharpoonup 0$ dans $L_p(\mathbf{R})$, mais que $\|\tilde{T}\varphi_n\|_{L_p(\mathbf{R})}$ ne tend pas vers 0.

389. L réflexif $\Leftrightarrow$ boule unité S' faiblement compacte.

390. Utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela.

391. Non, si $c_0 \neq 0$; Oui, si $c_0 = 0$. (Par exemple un projecteur de dimension finie.)

3. Théorie des opérateurs de Fredholm.

392. Il existe un $c > 0$ tel que $\forall a_n \neq 0$, $|a_n| > c$. Appliquer le théorème de Banach de l'opérateur inverse.

393. $\operatorname{im} T^k = l_p(\mathbf{R})$, donc $\operatorname{coker} T^k = 0$; $\ker T^k$ est engendré par les k premiers vecteurs de base.

394. a) Il est évident que la suite est semi-exacte en L_0 et L_3.

b) Montrons qu'elle est semi-exacte en L_1. Soit x un sommet quelconque de P et supposons que e_x est égal à 1 sur x et à 0 sur les autres sommets. Alors $d_1 e_x$ est égale à 1 sur les arêtes partant de x, à -1 sur les arêtes entrant en x et à 0 sur les autres. Considérons une face quelconque Δ contenant x ; alors x appartient simultanément aux arêtes Γ_1 et Γ_2 de Δ. Si Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux des arêtes partantes de x ou entrantes en x alors $\varepsilon(\Gamma_1, \Delta) = -\varepsilon(\Gamma_2, \Delta)$. Si une arête sort de x et l'autre y entre, alors $\varepsilon(\Gamma_1, \Delta) = \varepsilon(\Gamma_2, \Delta)$. D'où $\alpha_2\alpha_1 = 0$.

b) Montrons maintenant que la suite est semi-exacte en L_2. Considérons une arête quelconque Γ et une fonction f_Γ égale à 1 sur Γ et à 0 sur les autres arêtes. Soit Δ_1, Δ_2 un couple quelconque de faces contenant Γ. Si $\varepsilon(\Gamma, \Delta_1) = \varepsilon(\Gamma, \Delta_2)$, alors $\varepsilon(\Delta_1, P) = -\varepsilon(\Delta_2, P)$. Si $\varepsilon(\Gamma, \Delta_1) = -\varepsilon(\Gamma, \Delta_2)$, alors $\varepsilon(\Delta_1, P) = \varepsilon(\Delta_2, P)$. D'où $d_3 d_2 = 0$. Pour le cube et le simplexe $H_0 = \mathbf{R}$; $H_1 = H_2 = H_3 = 0$. Pour le cube troué $H_0 = H_1 = \mathbf{R}$, $H_2 = H_3 = 0$. Pour le cube avec une nappe intérieure $H_0 = H_2 = \mathbf{R}$, $H_1 = H_3 = 0$.

395. $\operatorname{im} C^k(T)$ est le sous-espace des fonctions f de $C^{k-1}(T)$ telles que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Ces deux espaces de cohomologies sont de dimension un.

396. En admettant que $T_0 = T_{n+1} = 0$ on obtient

$$H_i \equiv \ker T_{i+1}/\operatorname{im} T_i\ ; \qquad L_i/\ker T_{i+1} \equiv \operatorname{im} T_{i+1}\ ; \qquad i = 0, \ldots, n\ ;$$

d'où

$$\dim H_i + \dim \operatorname{im} T_i = \dim \ker T_{i+1}\ ;$$

$$\dim \operatorname{im} T_{i+1} + \dim \ker T_{i+1} = \dim L_i.$$

397. L'opérateur $T_{k+1} \circ T_k$ est nul, puisque l'opérateur adjoint $T'_k \circ T'_{k+1}$ l'est. Donc, la suite donnée est semi-exacte : $\operatorname{im} T_k \subset \ker T_{k+1}$. Si une fonctionnelle $f \in L'_{k+1}$ s'annule sur $\operatorname{im} T_k$, alors $T'_k f = 0$. Donc, $f \in \ker T'_k = \operatorname{im} T'_{k+1}$. Et par suite f s'annule sur $\ker T'_{k+1}$ et $\ker T_{k+1} = \overline{\operatorname{im} T_k}$. Reste à vérifier que l'image de T_k est fermée. Deux normes sont définies sur l'espace $\operatorname{im} T_k$: la norme de l'espace L_k et la norme de l'espace quotient $L_{k-1}/\ker T_k$. L'espace des fonctionnelles continues pour la première norme est constitué des fonctionnelles de L'_k bornées sur $\operatorname{im} T_k$ (théorème de Hahn-Banach). Cet espace s'identifie à $\operatorname{im} T'_k$. Les fonctionnelles continues pour la deuxième norme forment un sous-espace dans L'_{k-1} confondu avec $\ker T'_{k-1}$ (puisque $\ker T_k = \overline{\operatorname{im} T_{k-1}}$). Par hypothèse, $\operatorname{im} T'_k = \ker T'_{k-1}$. Donc, les collections d'ensembles faiblement bornés pour les deux normes sont confondues. Or, dans les espaces normés, un ensemble faiblement borné l'est fortement. Donc, les collections d'ensembles fortement bornés coïncident également. Les exercices 328 et 31 nous disent que $\operatorname{im} T_k$ est fermé.

Remarque. L'exemple de l'exercice 293 montre qu'il existe des suites exactes $0 \leftarrow L'_1 \leftarrow L'_2 \leftarrow 0$ qui ne sont duales d'aucune suite exacte de la forme $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow 0$.

398. La semi-exactitude de la suite duale résulte de l'égalité $T'_k \circ T'_{k+1} = (T_{k+1} \circ T_k)' = 0$. Soit f une fonctionnelle linéaire sur l'espace $H_k = \ker T_{k+1}/\operatorname{im} T_k$. On traitera f comme une fonctionnelle sur $\ker T_{k+1}$, égale à 0 sur $\operatorname{im} T_k$. Soit F le prolongement de f à L_k. Il est évident que $F \in \ker T'_k$. De plus si F_1 et F_2 sont deux prolongements différents, alors $F_1 - F_2$ s'annule sur $\ker T_{k+1}$ et par suite appartient à $\operatorname{im} T'_{k+1}$. (Cette affirmation utilise le fait que $\operatorname{im} T_{k+1}$ est fermé.) Donc tous les prolongements forment un élément de l'espace quotient $\ker T'_k/\operatorname{im} T'_{k+1}$.

399. $S : \{x_n\} \to \{x_{n-1}\}$ (on admet que $x_0 = 0$).

400. Mettre T sous la forme $T = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n_0}(1+K)$ où K est un opérateur intégral, donc compact. Réponse : $\operatorname{ind} T = n$. Une autre méthode consiste à expliciter le noyau et le conoyau de T.

401. Si $a(x)$ est différente de 0 partout, alors l'opérateur est inversible et par suite de Fredholm. Dans le cas contraire, le convoyau de l'opérateur est de dimension infinie (cf. exercice 2).

402. $\ker P = 0$, $\operatorname{im} P = C(\Gamma)$, puisque toute fonction u continue sur Γ peut être prolongée de façon unique en une fonction harmonique dans Ω.

403. En vertu du théorème d'unicité pour les fonctions holomorphes, le noyau de l'opérateur A de multiplication par $a(z)$ est nul.

Soient $z_1, \ldots, z_n$ les zéros de $a(z)$ sur Ω, $k_1, \ldots, k_n$, leurs multiplicités respectives. Alors $\operatorname{im} A = \{f \in H(\Omega),\ f^{(j)}(z_i) = 0,\ j = 1, \ldots, k_i\ ;\ i = 1, \ldots, n\}$. $\operatorname{ind} A = -\sum_{i=1}^{n} k_i$.

404. De la forme explicite du noyau, il résulte que la solution doit être de la forme $f(x) = a\cos x + b\sin x$. En portant cette expression dans l'équation on obtient un système d'équations linéaires en a et b ; $a = \lambda\left(\frac{\pi}{4}a + \frac{1}{2}b\right)$, $b = \lambda\left(\frac{1}{2}a + \frac{\pi}{4}b\right)$. Ce système admet une solution non triviale pour $\lambda = 4/(\pi \pm 2)$. Les fonctions propres sont proportionnelles à $\cos x \pm \sin x$.

405. Cette équation admet une solution unique pour tous les $g(x)$.

406. Pour $\lambda \neq \frac{1}{b-a}$.

407. Posons $\varphi_k(x) = H_k(x)e^{-x^2/2}$, où H_k sont des polynômes de l'Hermite (voir exercice 532). Vérifier que $\{\varphi_k\}$ est une base orthogonale dans H_0 et que $A_+\varphi_k = -2k\varphi_{k-1}$, $A_-\varphi_k = \varphi_{k+1}$.

408. Utiliser le théorème de Fubini pour prouver que la fonction $\psi(s) = (A\varphi)(s)$ est définie presque partout. Se servir de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski pour montrer que

$$|\psi(s)|^2 \leqslant \|\varphi\|_{L_2} \cdot \int_a^b |K(s, t)|^2\, dt.$$

Intégrer cette dernière inégalité par rapport à s pour obtenir la majoration voulue.

409. Vérification immédiate.

410. Appliquer le théorème de Fubini.

411. Poser $a_{ij} = \int_a^b Q_i(t)P_j(t)\,dt, \qquad b_j = \int_a^b Q_i(t)f(t)\,dt.$

412. Montrer qu'une puissance de l'opérateur du second membre de l'équation est un opérateur contractant, donc que l'équation homogène admet une solution unique (triviale). Utiliser ensuite l'alternative de Fredholm.

413. Appliquer le théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski.

414. Se servir du résultat de l'exercice 413 et raisonner par récurrence.

§ 3. Espaces fonctionnels et distributions.

1. Espaces des fonctions intégrables.

415. Considérer d'abord le cas des fonctions simples.

416. L'inégalité de Hölder entraîne

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leqslant \left(\int_X |fg|\,d\mu\right) \leqslant \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Donc $\sup \left| \int_X fg\, d\mu \right| \leqslant \left(\int_X |f|^p\, d\mu \right)^{1/p}$. Trouver une fonction $g(x)$ réalisant l'égalité.

417. Supposons qu'entre q et $p > 1$ on ait la relation $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. En appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_X |f+g|^p\, d\mu \leqslant \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_X |f|^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^p\, d\mu \right)^{1/q} + \left(\int_X |g|^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^p\, d\mu \right)^{1/p},$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité voulue.

418. Si $\{A_n\}$ est une base, alors les combinaisons des χ_{A_n} avec les coefficients rationels forment un ensemble partout dense dans $L_1(X, \mu)$. Si $g_n(x)$ est dense dans $L_1(X\mu)$, alors $B_{kmn} = \left\{ x \in X \,\middle|\, \frac{k}{m} \leqslant g_n(x) < \frac{k+1}{m} \right\}$ est une base.

419. Même solution que 418.

420. Montrer que sur $L_\infty(X, \mu)$ la distance de deux fonctions caractéristiques est égale à 0 ou à 1 selon que les espaces dont on mesure la distance sont équivalents ou non.

421. Utiliser le fait que la fonction $|f|^q$ appartient à l'espace $L_{p/q}(X, \mu)$ et la fonction identiquement égale à 1, à l'espace dual $L_{\frac{p}{p-q}}(X, \mu)$. On obtient incidemment que l'immersion de $L_p(X, \mu)$ dans $L_q(X, \mu)$ est continue et de norme $\leqslant \mu(X)^{1/q-1/p}$.

422. Soient $q > p$, $1/p > k > 1/q$. Considérer les fonctions

$$f_q(x) = x^{-k}\theta(x-1),$$

$$f_p(x) = x^{-k}\chi_{[0,1]}(x).$$

423. $1/\beta < p < 1/\alpha$.

424. Soit $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = \frac{1}{s}$, alors $\frac{1}{q/s}+\frac{1}{r/s} = 1$. En appliquant deux fois l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|fgh\|_1 \leqslant \|f\|_p \|gh\|_s \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

425. Il est immédiat de vérifier que $1/r = \alpha/p+\beta/q$, $\alpha+\beta = 1$. Se limiter au cas $q < \infty$, $f(x) \geqslant 0$. Alors $1 = \frac{1}{p/(r\alpha)}+\frac{1}{q/(r\beta)}$; appliquer l'inégalité de Hölder au produit $f^{\alpha r} \circ f^{\beta r}$.

426. Utiliser l'inégalité évidente

$$(\|f\|_\infty - \varepsilon)\,(\mu(X'))^{1/p} \leqslant \|f\|_p \leqslant (\mu(X))^{1/p}\, \|f\|_\infty,$$

où l'ensemble $X' \subset X$ est choisi en fonction de $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $|f| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$ pour $x \in X'$, $\mu(X') \neq 0$.

427. a) Utiliser le résultat des exercices 315, 253 et le théorème 23.

b), c), d) : voir indications de l'exercice 249.

428. $\|x^\alpha\|_p = (p\alpha+1)^{-1/p}$ pour $\alpha \neq 0$, $-1/p < \alpha$; $\|x^0\|_p = 1$ pour $1 \leqslant p < \infty$; $\|x^\alpha\|_\infty = 1$ pour $\alpha \geqslant 0$.

429. a) Le sous-espace des lignes polygonales de sommets en 0, ± 1, ± 2 ; ... ;

b) Le sous-espace des fonctions de L_1 telles que $f(x) = f([x])$.

430. Soit $V \subset L_\infty(X, \mu)$. L'application identique de $L_\infty(X, \mu)$ dans $L_1(X, \mu)$ est continue. Le théorème de Banach nous dit que l'application réciproque est continue sur V. Donc $\|f\|_\infty \leqslant M_1 \|f\|_1$ pour une constante M_1, $f \in V$. De là et de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski il vient $\|f\|_\infty \leqslant M_2 \|f\|_2$. Choisissons dans V un système $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ orthonormal par rapport au produit scalaire dans $L_2(X, \mu)$. Si $(c_1, \ldots, c_n)$ est un vecteur

de $l_2(n, \mathbf{R})$ de norme 1, alors $\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|_\infty \leqslant M_2 \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|_2 = M_2$. Il s'ensuit que pour presque tous les $x \in X$, le vecteur $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ admet dans $l_2(n, \mathbf{R})$ une norme $\leqslant M_2$. Donc $n = \int_X \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x)|^2 \, d\mu \leqslant M_2 \mu(X)$. Par suite $\dim V < \infty$.

431. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in L_p(\mathbf{R}, dx)$ il existe un intervalle $[a, b]$ tel que $\int_{\mathbf{R} \setminus [a, b]} (|f(x)|^p \, dx)^{1/p} < \varepsilon$. Appliquer le résultat de l'exercice 427.

432. Vérifier la continuité en moyenne sur l'espace $C_0(\mathbf{R})$ de l'exercice 431.

433. Vérifier la continuité en moyenne sur l'espace $C_0(\mathbf{R}^n)$.

434. Supposons d'abord que M est composé d'une seule fonction f. Alors la condition a) est automatiquement réalisée, la condition b) découle de la définition d'une fonction sommable et la condition c), de l'exercice 432. Si maintenant M est composé d'un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_n$, alors pour toute fonction f_i les conditions a), b) et c) sont réalisées avec des constantes c_i, $R_i(\varepsilon)$ et $\delta_i(\varepsilon)$ respectivement. Posons $c = \max_i c_i$, $R(\varepsilon) = \max_i R_i(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) = \min_i \delta_i(\varepsilon)$. Alors les conditions a), b) et c) sont vérifiées pour M. Si enfin M est un ensemble précompact pour lequel $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est un $\varepsilon/3$-réseau alors les conditions a), b) et c) sont remplies pour M avec les constantes $c + \varepsilon/3$, $R(2\varepsilon/3)$ et $\delta(\varepsilon/3)$. Ceci prouve la nécessité des conditions a), b) et c).

Supposons maintenant que les conditions a), b) et c) sont réunies. Considérons l'application φ_ε de M sur le sous-espace $C[-R(\varepsilon), R(\varepsilon)] \subset L_p(\mathbf{R}, dx)$ définie par $\varphi_\varepsilon(f)(x) = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \int_x^{x+\delta(\varepsilon)} f(t) \, dt$. La condition a) entraîne que $\varphi(M)$ est bornée dans $C[-R(\varepsilon), R(\varepsilon)]$, les conditions b) et c), que la distance dans $L_p(\mathbf{R}, dx)$ entre f et $\varphi_\varepsilon(f)$ est $\leqslant 2\varepsilon$, la condition b) enfin, que les fonctions $\varphi(f), f \in M$, sont équicontinues. Donc $\varphi(M)$ est un précompact dans $C[-R(\varepsilon), R(\varepsilon)]$ et à fortiori dans $L_p(\mathbf{R}, dx)$.

Si $\{\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)\}$ est un ε-réseau dans $\varphi(M)$, alors $f_1, \ldots, f_n$ est un 3ε-réseau dans M. Comme ε est arbitraire, M est un précompact.

435. L'application $f(x) \otimes g(x) \mapsto f(x) \cdot g(y)$ se prolonge en continuité en une application de $L_1(X, \mu) \otimes L_1(Y, \nu)$ dans $L_1(X \times Y, \mu \times \nu)$ n'accroissant pas la norme. Vérifions que cette application est bien une isométrie. Soit $\varphi \in L_1(X \times Y, \mu \times \nu)$. Alors φ est approchée en norme par des fonctions de la forme $\tilde{\varphi}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \chi_{F_i}(y)$, où E_i (resp. F_i) sont des sous-ensembles mesurables deux à deux disjoints dans X (resp. Y). Sans nuire à la généralité on peut admettre que $\mu(E_i)$ et $\nu(F_i)$ sont des nombres rationnels. On peut d'autre part admettre qu'ils sont entiers en multipliant $\tilde{\varphi}$ par un entier convenable. Donc, notre proposition se ramène au cas particulier où X et Y sont constitués d'un nombre fini de points de mesure 1. Cela veut dire que nous devons établir que les espaces $l_1(n, \mathbf{R}) \hat{\otimes} l_1(m, \mathbf{R})$ et $l_1(mn, \mathbf{R})$ sont isomorphes. Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base dans le premier espace, $f_1, \ldots, f_m$, une base dans le second ; pour base dans le produit tensoriel on peut prendre $e_i \otimes f_j$. Soit g_{ij} la base correspondante dans le troisième espace. Il faut prouver que

$$\left\| \sum_{ij} c_{ij} e_i \otimes f_j \right\| = \left\| \sum_{ij} c_{ij} g_{ij} \right\|, \quad \text{i.e.} \quad \inf \sum_\alpha \sum_i |a_i^{(\alpha)}| \sum_j |b_j^{(\alpha)}| = \sum_{ij} |c_{ij}|,$$

où l'infimum est pris sur toutes les représentations du vecteur $\sum_{ij} c_{ij} e_i \otimes f_j$ sous forme de la somme

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha \times \psi_\alpha \quad \text{où} \quad \varphi_\alpha = \sum_i a_i^{(\alpha)} e_i, \quad \psi_\alpha = \sum_j b_j^{(\alpha)} f_j.$$

Les estimations correspondantes résultent de l'égalité $e_{ij} = \sum a_i^{(\alpha)} b_j^{(\alpha)}$ et de l'étude de

la représentation du vecteur $\sum_{ij} c_{ij} \otimes f_j$ dans laquelle α parcourt tous les couples i, j, $\varphi_{ij} = c_{ij} e_i$, $\psi_{is} = f_j$.

436. a) On dira qu'un sous-ensemble E d'un espace X de mesure μ est un *atome* si $\mu(E) > 0$ et si tout sous-ensemble mesurable $F \subset E$ est tel que ou bien $\mu(F) = 0$ ou bien $\mu(F) = \mu(E)$. (Il est immédiat de vérifier que pour les mesures boréliennes μ les atomes sont les points de mesure positive). Montrer que les fonctions caractéristiques des atomes et elles seules sont des points extrêmes dans $L_1(X, \mu)$. (En particulier, l'espace l_1 possède des points extrêmes, l'espace $L_1[0, 1]$, non.)

b) Tous les points frontières de la boule (pour le prouver voir quand l'inégalité de Minkowski se transforme en égalité).

c) L'ensemble des f telles que $|f(x)| = 1$ pour presque tous les x.

437. l_1 est un espace dual de l'espace des suites convergeant vers 0, $L_1[0, 1]$ n'est dual d'aucun espace de Banach, puisque le cas échéant la boule unité aurait des point extrêmes contrairement à l'exercice 436a) (appliquer le théorème de Krein-Milman).

2. Espaces des fonctions continues.

438. Pour prouver la complétude considérer la limite ponctuelle d'une suite de Cauchy dans $C(X)$.

439. Les polynômes de n variables à coefficients rationnels forment un ensemble partout dense dans $C(X)$.

440. Si une fonction g appartient à la boule unité dans $C(X)$ alors

$$|F(g)| = \left| F\left(\frac{g+|g|}{2}\right) - F\left(\frac{|g|-g}{2}\right) \right| \leqslant F(1).$$

441. Si $f(x) \geqslant 0$, on posera $G_f = \{g : 0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)\}$. Soit $F_1(f) = \sup_{g \in G_f} F(g)$. Les inégalités $F_1(f) \geqslant F(f)$ et $F_1(f) \geqslant 0, f \geqslant 0$, sont évidentes. L'additivité de F_1 résulte de l'égalité $G_{f_1+f_2} = G_{f_1} + G_{f_2}$ $\left(\text{l'inclusion } G_{f_1} + G_{f_2} \subset G_{f_1+f_2} \text{ est évidente ; l'inclusion inverse résulte de l'égalité } g = \frac{gf_1}{f_1+f_2} + \frac{gf_2}{f_1+f_2}\right)$.

442. On désignera par E_ε un ε-voisinage de E et par $\bar{E}$ l'adhérence de E. Montrons que $\mu(\bar{K}_\varepsilon) \to \mu(K)$ pour $\varepsilon \to 0$ pour tout compact $K \subset X$. Fixons à cet effet $\delta > 0$ et considérons une fonction $\varphi \in C(X)$ telle que $\chi_K(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $F(\varphi) \leqslant \mu(K) - \delta$.

Soit L l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels $\varphi(x) \leqslant 1 - \delta$. Il est évident que L est un compact ne rencontrant pas K. Désignons par d la distance de K à L. Si $\varepsilon < d$, la fonction $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{1-\delta}$ est telle que $\chi_{\bar{K}_\varepsilon}(x) \leqslant \psi(x) \leqslant 1$. Donc $\mu(K_\varepsilon) \leqslant F(\psi) = \dfrac{F(\varphi)}{1-\delta} = \dfrac{\mu(K)-\delta}{1-\delta}$. Cette expression tend vers $\mu(K)$ pour $\delta \to 0$.

D'où l'égalité $\mu(K) + \mu(X \setminus K) = 1$, la finie additivité ainsi que la régularité de la fonction

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K) = \inf_{G \supset A} \mu(G),$$

où K est un compact, G un ouvert. (Comparer avec l'exercice 94).

L'inégalité $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} (E_n)$ résulte immédiatement de la définition de $\mu(E_n)$ et de l'inégalité $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} K_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i)$ qui découle de la définition de $\mu(K)$.

Pour établir l'inégalité inverse on se sert de la régularité de μ, on introduit un compact $K \subset E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ et des ouverts $G_i \supset E_i$ tels que

$$\mu(E \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mu(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

L'inclusion $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ entraîne $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} G_n$ pour un certain N. La finie additivité de μ entraîne maintenant la majoration $\mu(K) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(G_n)$ et partant l'inégalité $\mu(E) \leqslant$ $\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) + \varepsilon$.

443 a) 1 ; b) 2 ; c) 3 ; d) $4/\varepsilon^2$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; f) 2.

444. $F(f) = \int_{-1}^{1} G(x)\, df(x)$; $G(x)$ et $\|F\|$ sont respectivement égales. a) $\theta(x)$, 1 ;

b) $x - 2\theta(x)$, 4 ;

c) $\frac{1}{2} x^2 \theta(x)$, 1/2 ;

d) $x - 3x\theta(x)$, 3.

445. Pour prouver la condition suffisante, il faut montrer que pour toute fonction en escalier $S(x)$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 S(x)\, dg_n(x) = \int_0^1 S(x)\, dg(x).$$

Approcher une fonction quelconque $f(x) \in C[0, 1]$ par des fonctions en escalier.

446. Ramener l'exercice au cas où M est composé de fonctions monotones non décroissantes. Prendre une suite de M convergeant vers un point, en extraire une suite partielle convergeant vers un autre point et ainsi de suite ; à l'aide du procédé diagonal (c'est-à-dire en prenant le n-ième terme de la n-ième suite partielle) former une suite partielle $\{\varphi_n\}$ convergeant en tous les points rationnels de l'intervalle [0, 1]. Montrer que $\{\varphi_n\}$ converge vers une fonction $\varphi(x)$ non décroissante partout sauf en un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité de $\varphi(x)$, ce qui permet par le procédé diagonal d'extraire une suite partielle de $\{\varphi_n\}$ convergeant en ces points. Deuxième méthode : utiliser la précompacité de M pour la topologie faible et le résultat de l'exercice 445.

447. a), b) : les prolongements sont respectivement $f(0)$ et $f(1)$; c), d) pas de prolongement, puisque toute fonction $f \in C[0, 1]$ peut être approchée par des polynômes de la forme $(x+1)\, p_1(x)$ tels que $F_3 \equiv 0$ et par des polynômes de la forme $p_2(x^{N+1})$ tels que $F_4(f) = c_0 f(0)$. Vérifier que ces prolongements ne conviennent pas.

448. $f_1(x) \equiv 1$, $f_2(x) \equiv -1$ (voir exercice 299).

449. Soit $\mu_x = \tau\mu_1 + (1-\tau)\mu_2$, où $\tau \in]0, 1[$ et supposons que μ_1 et μ_2 appartiennent à la boule unité de $C'(X)$. Désignons par f_x une fonction quelconque de $C(X)$ égale à 1 en x et prenant en les autres points des valeurs de $[0, 1[$ (par exemple, $f_x(y) = \max\{1 - d(x, y), 0\}$). Alors $\mu_x(f_x) = \|f_x\| = 1$, $|\mu_1(f_x)| \leqslant 1$, $|\mu_2(f_x)| \leqslant 1$. Donc, $\mu_1(f_x) = \mu_2(f_x) = 1$. Ceci n'est possible que dans le cas où $\mu_1(\{x\}) = \mu_2(\{x\}) = 1$, c'est-à-dire $\mu_1 = \mu_2 = \mu_x$. Donc μ_x est un point extrême.

Soient maintenant μ un point extrême quelconque de la boule unité de $C'(X)$, $f(x)$ une fonction continue sur X prenant ses valeurs dans $]0, 1[$. On s'assure immédiatement que soit μ soit $(-\mu)$ est une charge positive. Supposons pour fixer les idées que $\mu > 0$. Posons $\mu_1 = \frac{f\mu}{\mu(f)}$, $\mu_2 = \frac{(1-f)\mu}{1-\mu(f)}$. Alors μ_1 et μ_2 sont situés sur la boule unité de $C'(X)$ et

$$\mu = \mu(f) \cdot \mu_1 + [1 - \mu(f)]\mu_2.$$

Comme μ est un point extrême, μ_1 et μ_2 sont confondues avec μ. D'où l'on déduit sans peine que $\mu(fg) = \mu(f)\, \mu(g)$ quelles que soient $f, g \in C(X)$ à valeurs dans $]0, 1[$. Cette relation est valable pour tous les $f, g \in C(X)$, puisqu'elle est bilinéaire. Désignons par L le noyau de la fonctionnelle μ. C'est un idéal fermé de codimension 1 dans $C(X)$. On montre sans peine qu'il existe un point $x \in X$ en lequel s'annulent toutes les fonctions de L.

(Dans le cas contraire X serait recouvert par un nombre fini de voisinages U_i pour lesquels il existerait des $f_i \in L$ tels que $f_i(x) \neq 0$ sur U_i. Alors $f = \sum_i |f_i|^2 \in L$ et $f \neq 0$ sur X, d'où $L = C(X)$.) La condition codim $L = 1$ entraîne l'unicité de ce point. Maintenant il est clair que $\mu = \mu_x$.

450. *Première méthode.* L'algèbre A contient avec toute fonction φ la fonction $P(\varphi)$, où P est un polynôme. Du théorème de Weierstrass et du fait que A est fermé, il résulte que A contient $f \circ \varphi$, où f est une fonction continue sur la droite. Se servir de ceci pour prouver successivement que A contient les fonctions suivantes : 1) une fonction φ telle que $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = 1$, $0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$ pour tous les autres $z \in X_i$, quels que soient x et y $(x \neq y)$ de X ;

2) une fonction φ telle que $\varphi(x) = 0$, $\varphi(z) = 1$ pour tous les $z \in X \backslash U$ quels que soient $x \in X$ et son voisinage U.

3) une fonction φ égale à 0 sur un compact K_1 et à 1 sur un compact K_2 disjoint de K_1, et dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 en les autres points de X.

Montrer que toute fonction $f \in C(X)$ de norme 1 s'approxime à 2/3 près par une fonction $\varphi \in A$ de norme 1/3.

Deuxième méthode. Supposons que L est l'annulateur de A dans $C(X)'$, et que F est un point extrême de la sphère unité de L. Montrer que pour toute fonction $a \in A$ la fonctionnelle $F_a(f) = F(af)$ est proportionnelle à F (voir indication de l'exercice 449). En déduire que F est proportionnel à μ_k et par suite est nul.

451. Non ; considérer

$$A_{x_0} \{f(x) \mid f(x) \in C(X),\ f(x_0) = 0\}.$$

452. Supposons que le diamètre de l'ensemble X est égal à 1 (ce qui visiblement ne nuit pas à la généralité). X étant un compact, on peut le représenter sous forme d'une réunion d'un nombre fini de compacts $X_1, \ldots, X_{n_1}$ de diamètre 1/2. Chaque compact X_i, $i = 1, \ldots, n_1$ peut être représenté à son tour par la réunion d'un nombre fini de compacts $X_{i1}, \ldots, X_{in_2}$ de diamètre 1/4, et ainsi de suite. Nous allons construire l'application φ de proche en proche. Tout d'abord nous allons partager l'intervalle [0, 1] en $2n_1 - 1$ intervalles égaux $\Delta_1, \ldots, \Delta_{2n_1-1}$ et nous admettrons que $\varphi(\Delta_{2k-1}) \subset X_i$ et que $\varphi(\Delta_{2k})$ est le chemin qui relie un point $x_k \in X_k$ à un point $x_{k+1} \in X_{k+1}$. (Ce chemin existe puisque X est linéairement connexe.) Partageons maintenant l'intervalle Δ_{2k-1} en $2n_2 - 1$ intervalles égaux $\Delta_{2k-1,i}$, $1 \leqslant i \leqslant 2n_2 - 1$ et admettons que $\varphi(\Delta_{2k-1,2l-1} \subset X_{kl}$ et que $\varphi(\Delta_{2k-1,2l})$ est le chemin qui relie $x_{kl} \in X_{kl}$ à $x_{k,l+1} \in X_{k,l+1}$. En poursuivant cette procédure on définit une application φ sur un sous-ensemble dense de [0, 1], application qui est uniformément continue aux points où elle est définie. On peut donc la prolonger en continuité en une application continue sur l'intervalle [0, 1] tout entier.

453. La proposition de cet exercice est un cas particulier de l'exercice 452. On peut illustrer la construction de l'application sur le schéma suivant (fig. 4). Les nombres $n_1, n_2, \ldots$ sont pris ici égaux à 4, pour représentant $x_{i_1, \ldots, i_k}$ du carré $X_{i_1, \ldots, i_k}$ on prend son centre ; les quatre carrés d'ordre k contenus dans le carré d'ordre $(k-1)$ sont parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre en commençant par le coin inférieur gauche.

454. L'application $t \mapsto (|\cos 2\pi t|^{2/q} \operatorname{sgn} \cos 2\pi t,\ |\sin 2\pi t|^{2/q} \operatorname{sgn} \sin 2\pi t)$ envoie [0, 1] dans le cercle unité de $l_p(2, \mathbf{R})$. L'immersion correspondante de $l_p(2, \mathbf{R})$ dans $C[0, 1]$ est de la forme

$$(\alpha, \beta) \mapsto \varphi_{\alpha,\beta}(t) = \alpha\, |\cos 2\pi t|^{2/q} \operatorname{sgn} \cos 2\pi t + \beta\, |\sin 2\pi t|^{2/q} \operatorname{sgn} \sin 2\pi t.$$

Vérifier à l'aide de l'inégalité de Hölder que

$$\max_{\in [0,1]} |\varphi_{\alpha,\beta}(t)| = \sqrt[p]{|\alpha|^p + |\beta|^p}.$$

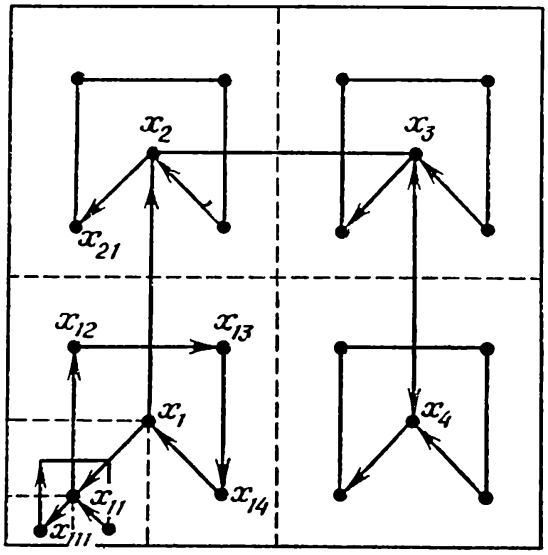


Fig. 4

455. Considérons l'application linéaire naturelle φ de

$$C[0, 1]\otimes C[0, 1] \to C[\square],$$

par définition de la norme dans un produit tensoriel, on a

$$\varphi(f\otimes g)(x, y) = f(x)\, g(y).$$

Il est clair que cette application est injective et du théorème de Weierstrass il résulte que l'image de φ est dense dans $C(\square)$. Reste à vérifier que φ est une isométrie. Par définition, les normes sur le produit tensoriel sont égales à

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i\otimes g_i \right\| = \sup_{\|\mu\|=\|\nu\|=1} \left| \sum \mu(f_i)\, \nu(g_i) \right|.$$

Il suffit de prendre le supremum uniquement sur les points extrêmes de la boule unité de $C[0, 1]'$. Donc, (voir exercice 449)

$$\left\| \sum_i f_i\otimes g_i \right\| = \sup_{x, y} \left| \sum_i f_i(x)\, g_i(y) \right| = \sup_{x, y} \left| \varphi\left(\sum_i f_i\otimes g_i\right)(x, y) \right| = \left\| \varphi\left(\sum_i f_i\otimes g_i\right) \right\|.$$

456. Utiliser le théorème de Stone-Weierstrass pour prouver que $C(X)\otimes C(Y)$ est dense dans $C(X\times Y)$. La démonstration s'achève par une vérification triviale du fait que la norme $p_X\otimes p_Y$, où p_X et p_Y sont des normes dans $C(X)$ et $C(Y)$, est confondue avec la norme de $C(X\times Y)$.

457. Utilisons le fait que l'opérateur adjoint A' définit une isométrie de la boule unité de $C(Y)'$ sur la boule unité de $C(X)'$. Donc, pour tout point $y \in Y$ il existe un point $x = \varphi(y)$ et un nombre $a(y) = \pm 1$ tels que $A'\mu_y = a(y)\mu_x$. D'où $(Af)(y) = a(y) f(\varphi(y))$. En posant $f = \text{const}$, on voit que $a \in C(Y)$. Donc, $f\circ\varphi \in C(Y)$ pour toute fonction $f \in C(X)$. Il s'ensuit que φ est une application continue. En appliquant ce qui vient d'être dit à l'opérateur A^{-1} on s'assure que la fonction inverse est également continue.

458. Soit $F_n(x, y) = f_n(x)+g_n(y)$ une suite de Cauchy dans $C(\square)$. Alors $F_n(0, y) = f_n(0)+g_n(y)$ est de Cauchy dans $C[0, 1]$ et par suite $f_n(x)-f_n(0)$ est de Cauchy et

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x)-f_n(0)) + \lim_{n\to\infty} (g_n(y)+f_n(0)).$$

459. Soit $\{r_n\}$ une suite partout dense dans $[0, 1]$ et de plus $r_0 = 0$, $r_1 = 1$. Considérer un système $\{f_n\}$, où $f_0(x) \equiv 1$, $f_1(x) = x$ et où $f_n(x)$ pour $n > 1$ se définit comme suit :

supposons que r_n appartient à (r_{s_1}, r_{s_2}) l'un des $(n-1)$ intervalles en lesquels les points $r_2, \ldots, r_{n-1}$ partagent $[0, 1]$; alors

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(r_{s_1}) = 0, \quad f_n(r_n) = 1, \quad f_n(r_{s_2}) = 0, \quad f_n(1) = 0,$$

et le graphe de $f_n(x)$ est une ligne polygonale de quatre segments.

Remarque. Il existe aussi des bases topologiques dans les espaces $L_p(]0, 1[)$ et l_p pour $1 \leqslant p < \infty$, dans un espace hilbertien séparable (manifestement), mais pas dans tout espace de Banach séparable.

460. Supposons que toute fonction $f \in CP[0, 1]$ est la limite uniforme d'une série trigonométrique $\sum_{k \in Z} c_k(f) e^{2\pi i k x}$. Alors cette série converge au sens de la métrique de $L_2(]0, 1[)$. Donc les nombres $c_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction f. Soit $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{2\pi i k x}$. Par hypothèse, $S_n \to 1$. Mais ceci contredit le fait que $\|S_n\| \to \infty$.

$\left(\text{Vérifier que } \|S_n\| = \int_0^1 \frac{\sin (2n+1)\pi x}{\sin \pi x}\, dx \text{ et que cette intégrale admet une minoration de l'ordre de } C \ln n\right)$.

3. Espaces des fonctions lisses.

461. a) La non-métrisabilité résulte du fait que la suite $\{\lambda_n e_n\}$, où $\{\lambda_n\}$ est une suite de nombres qui n'est pas à support borné, ne converge pas vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbf{N})$.

b) La suite $\{x_k^{(n)}\}$ converge vers $\{x_k\}$ pour $n \to \infty$ si et seulement si : 1) il existe un N tel que $x_k^{(n)} = 0$ pour $k > N$ et pour tous les n ; 2) $x_k^{(n)} \to x_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, N$.

c) Soient x_k une suite de points de Ω ne possédant pas de limite à l'intérieur de Ω ; $\{U_k\}$ une collection de voisinages deux à deux disjoints de points x_k ; φ_k une fonction non nulle à support dans U_k. L'application cherchée de $\mathcal{D}(\mathbf{N})$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ peut être définie par la formule

$$\{c_k\} \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k.$$

462. L'implication a) $\Rightarrow$ b) est évidente ; b) $\Rightarrow$ c), puisque toute suite $\varphi_n \to 0$ converge vers 0 pour toutes les semi-normes ; c) $\Rightarrow$ d), puisque $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est métrisable ; d) $\Rightarrow$ a) par définition de la topologie dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

463. $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est l'intersection d'une famille d'ensembles fermés $I_x = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \varphi(x) = 0\}$, où x parcourt $\Omega \backslash K$.

464. Construire tout d'abord une famille finie de fonctions $\{\psi_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant N$ pour laquelle $\operatorname{supp} \psi_i \subset U_i$ et $\psi = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \geqslant \delta > 0$ sur K. Supposons maintenant que $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ est telle que $f(x) = 0$ pour $x < \delta/2$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \geqslant \delta$. Alors $\varphi_i = \psi_i \cdot f(\psi(x))$ est la famille cherchée.

465. Se servir du résultat de l'exercice 464.

466. Représenter $\Omega = \mathbf{R}^n \backslash K$ par une réunion d'un nombre dénombrable de boules. Utiliser le fait que toute fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$ tell que $|\varphi(x)| < e^{\frac{1}{d(x, K)}}$ se prolonge (par des valeurs nulles sur K) en une fonction de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.

467. Oui.

468. Se servir de la méthode de démonstration du théorème 30 chap. III.

469. Toutes sauf c).

470. c) et d).

471. Dans le cas de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ vérifier que $\varphi_k \to 0$ implique que $x_i \cdot \varphi_k \to 0$ et $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \to 0$; dans le cas de $S(\mathbf{R}^n)$ et de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ majorer les semi-normes correspondantes.

472. a) Oui, b) non, c) oui.

473. Utiliser l'identité

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^k} f_1\left(\frac{x}{n}\right).$$

474. a) oui, b) non, c) oui, d) oui, e) oui, f) oui.

475. a) Utiliser le fait que la série $\sum_{k \in \mathbf{Z}} k^m f^{(n)}(x+k)$ converge absolument et uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$ si $f \in S(\mathbf{R})$. L'opérateur A^{-1} est défini explicitement par la formule $(A^{-1}g)(x) = \int_0^1 g(x, y)\, dy$.

b) Les opérateurs $A : S(\mathbf{R}^n) \to G(\mathbf{R}^{2n})$ et $A^{-1}(G(\mathbf{R}^{2n})) \to S(\mathbf{R}^n)$ sont de la forme

$$Af(x, y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} f(x+k)e^{-2\pi iky}, \qquad A^{-1}g(x) = \int_{T^n} g(x, y)\, dy.$$

476. Soient p_k, q_k et r_k des normes respectivement sur les espaces $C^k(\mathbf{T}^m)$, $C^k(\mathbf{T}^n)$ et $C^k(\mathbf{T}^{m+n})$. Vérifier que la norme $p_k \underset{\vee}{\otimes} q_k$ est équivalente à r_k (utiliser le fait que toute fonctionnelle linéaire continue sur $C^k(\mathbf{T}^m)$ est de la forme $\langle f, \varphi\rangle = \sum_{|i| \leqslant k} \int_{\mathbf{T}^m} \partial^i\varphi(t)\, d\nu_i(t)$, où ν_i sont des charges boréliennes à variation finie sur $\mathbf{T}^m$). Se servir ensuite de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski pour $l_2(\mathbf{T}^{m+n})$ pour montrer que la norme $p_k \hat{\otimes} q_k$ est majorée par la norme r_s pour $s > (m+n)/2+2k$. (De façon plus précise, la série de Fourier converge pour la norme $p_k \hat{\otimes} q_k$ vers une fonction $f \in C^s(\mathbf{T}^{m+n})$.)

Donc les systèmes de normes $\{p_k \underset{\vee}{\otimes} q_n\}$, $\{r_k\}$ et $\{p_k \hat{\otimes} q_n\}$ sont équivalents, d'où la proposition voulue si l'on se sert du théorème de Weierstrass qui affirme que les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{D}(\mathbf{T}^n)$.

477. a) Il faut vérifier que pour $t \in [-1, 1]$ toutes les fonctions s'annulent en dehors d'un compact K ne dépendant pas de t et que $f_t^{(l)}$ tend uniformément sur K vers $(\partial_y f)^{(l)}$, où l est un multi-indice quelconque et ∂_y désigne la dérivation partielle suivant la direction y. Utiliser le théorème d'accroissement fini.

b) Il faut vérifier que $f_t^{(l)}$ tend uniformément vers $(\partial_y f)^{(l)}$ sur tout compact $K \subset \mathbf{R}^n$.

478. La propriété a) est évidente ; la propriété b) se démontre par récurrence en utilisant l'identité $f_n^{(r)}(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_0^{\delta_n} f_{n-1}^{(r)}(x-t)\, dt$, qui est valable pour $r < n$. La convergence de la suite $f_n^{(r)}$ pour $n \to \infty$ et r fixe résulte de la majoration

$$|f_n^{(r)} - f_{n-1}^{(r)}| \leqslant \frac{2^{r+1}}{\delta_1 \ldots \delta_{r+1}} \cdot \delta_n,$$

qui est valable pour $n \geqslant r+2$.

479. a) Soit M un ensemble borné dans L. Il est alors précompact pour toute semi-norme p_k, car borné pour la semi-norme p_{k+1}. Munissons comme toujours L d'une distance définie par $d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} p_k(f-g)$. Si $\{f_i\}$ est un 2^{-l}-réseau fini pour M pour la semi-norme $\sum_{k=1}^{l} p_k$, il sera un 2^{1-l}-réseau pour la distance d.

b) Traitons le cas $L = \mathcal{D}_K(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela l'ensemble M qui est borné pour la norme $p_{k+1}(f) = \max_{\substack{x \in K \\ |l| \leqslant k+1}} |\partial^l f(x)|$, sera précompact pour la norme p_k, car toutes les fonctions de la forme $\partial^l f$, $|l| \leqslant k$ seront uniformément bornées et équicontinues sur Ω.

480. Si φ_n est une suite fondamentale dans $\mathcal{E}(\Omega, L)$ alors la suite $\partial^l\varphi_n(x)$ le sera pour tout multi-indice l et pour tout point $x \in \Omega$. Soit $\psi_l(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \partial^l\varphi_n(x)$. Montrer que $\psi_l(x) = \partial^l\psi_0(x)$ et que $\varphi_n \to \psi_0$ pour la topologie de $\mathcal{E}(\Omega), L)$. La métrisabilité de $\mathcal{E}(\Omega, L)$ résulte de l'existence d'un système dénombrable de normes. (Si $\{p_j\}$ est un système dénombrable de normes définissant la topologie de L et $\{K_i\}$ un système dénombrable de compacts épuisant le domaine Ω, alors les semi-normes $p_{K_i l_j}$ définissent la topologie de $\mathcal{E}(\Omega, L)$.)

481. Considérer l'application de $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ dans $\mathcal{E}(\Omega_1, \mathcal{E}(\Omega_2))$ définie par la formule $\varphi \to f$, où $f(x)(y) = \varphi(x, y)$. Utiliser le résultat de l'exercice 477.

482. Utiliser le résultat de l'exercice 476 et le fait que les fonctions périodiques sont denses dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.

483. Utiliser le résultat de l'exercice 475 pour le cas $S(\mathbf{R}^n)$.

4. Distributions.

484. Tous les supports sont confondus avec $\mathbf{R}$. La continuité des fonctionnelles résulte du théorème de complétude faible de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

485. Etudier cette limite séparément pour les fonctions paires et impaires. Réponse : 0.

486. Il faut vérifier que si l'intégrale $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$ est nulle pour tous les $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ est identiquement nulle.

487. a) Montrer que $\lim \langle f_\varepsilon, \varphi\rangle = 0$ pour toutes les fonctions φ telles que $\varphi(0) = 0$.

488. Etudier séparément des fonctions nulles en 0 et une fonction constante au voisinage de 0.

489. Réponse : $\pi\delta(x)$.

490. Cette limite existe et est égale à 0.

491. Utiliser le fait que $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ est dense dans $L_p(\mathbf{R}, dx)$.

492. Soit $p(x)$ une fonction localement sommable. Pour tout intervalle $[a, b]$ ne contenant pas l'origine des coordonnées, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ convergeant vers $\chi_{[a,b]}(x)$ et de support appartenant à l'intervalle $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ qui ne contient pas non plus l'origine des coordonnées. L'égalité $0 = \varphi_n(0) = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,p(x)\,dx$ implique que $\int\limits_a^b p(x)\,dx = 0$ quels que soient a et b de même signe. Or la fonction $q(x) = \int\limits_0^x p(t)\,dt$ est continue en x, donc $q(x) = \text{const}$ et $p(x) = 0$ presque partout en vertu de l'exercice 253.

493. On remarquera que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{T}^n)$ se représente par une série uniformément convergente : $\varphi(t) = \sum\limits_{k=\mathbf{Z}^n} c_k l^{2\pi ikt}$. Donc $\langle e^{2\pi ikt}, \varphi\rangle = c_{-k}$ et $\left\langle \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{2\pi ikt}, \varphi, \varphi \right\rangle = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^n} c_{-k} = \varphi(0)$.

494. Pour système déterminant de semi-normes sur $\mathcal{D}(\mathbf{T}^n)$ on peut prendre les normes des espaces $C^k(\mathbf{T}^n)$.

495. Soit $\varphi(x) = e^{2x}\cdot\omega(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, où $\omega \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ est une fonction support $[-1/3, 1/3]$ identiquement égale à 1 sur $[-1/6, 1/6]$. Etudier l'action de F sur les fonctions $\varphi(x \pm k)$.

496. Vérifier que $\langle\delta, \varphi\rangle = -\int\limits_{\mathbf{R}} \theta(x)\,\varphi'(x)\,dx$. Réponse : 1.

497. a) D'ordre 1. Construire une suite de fonctions $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ de support sur $[0, 1]$ tendant uniformément vers 0 sur $[0, 1]$, sans que v.p. $\int \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx$ tende vers 0. (Poser par exemple $\varphi_n(x) = 1/\ln n$ sur l'intervalle $[1/(2n), 1/2]$.) b) D'ordre 0.

498. Une méthode consiste à développer $1/(x \pm i0)$ en une somme de composantes paire et impaire et à utiliser l'exercice 487b).

499. Voir exercices 497 et 498.

500. a) Utiliser le lemme suivant l'algèbre linéaire. Soient données des fonctionnelles linéaires $f_1, \ldots, f_n$ et f sur un espace vectoriel L. Si les conditions $f_1(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$ impliquent que $f = 0$, alors f est une combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_n$.

b) Utiliser le n° a) et le théorème de Hahn-Banach pour un espace localement convexe.

501. a) $[-1, 1]$, 0,
b) $\{-1 ; 0 ; 1\}$, 0.

502. a) Intégrer par parties.
b) Utiliser le théorème de complétude $*$-faible de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.
c) Utiliser les relations $\frac{d}{dx}\left(\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right) = \frac{x_+^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda-1)}$ et la « condition initiale » $x_+^0/\Gamma(1) = \theta(x)$.
Réponse : $x^{(-n-1)}/\Gamma^{(-n)} = \delta^{(n)}(x)$.

503. a) Si le support de $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ ne rencontre pas l'ensemble $f(x, y) = c$, alors $\langle F_c, \varphi\rangle = \text{const}$ au voisinage de c. Donc $\left\langle \frac{dF_c}{dc}, \varphi \right\rangle = 0$.

b) En choisissant un système de coordonnées locales, on peut ramener cet exercice au cas où $f(x, y) = x$.

c) Choisir le paramètre local t sur la courbe Γ d'équation $f(x, y) = c$ de telle sorte que $dx \wedge dy = df \wedge dt$. Alors $\left\langle \frac{dF_c}{dc}, \varphi \right\rangle = \int_\Gamma \varphi(t)\, dt$.

504. Si $c \neq 0$, on peut raisonner comme dans l'exercice 503b). Réponse : $\left\langle \frac{dF_c}{dc}, \varphi \right\rangle = \iint_{\Gamma_c} \varphi \cdot \omega$ où ω est une 2-forme différentielle sur l'hyperboloide $x^2+y^2-z^2 = c$, définie de façon unique par la condition $\omega \wedge d(x^2+y^2-z^2) = dx \wedge dy \wedge dz$. Si $c = 0$ alors $\frac{dF_c}{dc}$ est confondue avec la distribution définie par l'intégrale $\frac{1}{2}\iint \varphi \frac{dx \wedge dy}{z}$ étendue au cône $x^2+y^2 = z^2$. (En dehors de l'origine des coordonnées la coïncidence se prouve comme pour $c \neq 0$ par passage à un système local de coordonnées $x, y, c = x^2+y^2-z^2$. La différence ce ces distributions est concentrée en (0, 0, 0) et est invariante par le groupe de Lorentz. De plus, il est immédiat de vérifier que $\left.\frac{dF_c}{dc}\right|_{c=0}$ est une distribution homogène de degré -2. Donc, elle est nulle ; voir indication de l'exercice 529.)

505. Utiliser l'isomorphisme $(L_1, L_2')(L_1 \hat{\otimes} L_2)'$ et les résultats de l'exercice 483.

506. a) $K(x, y) = \delta(x-y)$,
b) $K(x, y) = \delta(x-a, y-b)$.

5. Opérations sur les distributions.

507. a) $2\delta(x)$, b) $\delta(x)$, c) $\sum \delta(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

508. a) $2\delta(x)$; b) $a^2e^{-a|x|} - 2a\delta(x)$;
c) $\sum_{k \in \mathbf{Z}} 2\delta(x-\pi k) - |\sin x|$;
d) $-2 \sin a\delta(x+a) - 2 \cos x \cdot \operatorname{sgn}(x+a)e^{-|x+a|}$.

509. a), b). Vérification immédiate à l'aide de la définition du produit direct de distributions.
c) Utiliser la définition de la dérivée.
d) Appliquer le théorème du produit direct aux fonctions $\delta'(x)$ et 1.

510. a) Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, dx = 0$ est de la forme $\varphi = \psi'$, où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

b) Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\varphi(0) = 0$ est de la forme $\varphi(x) = x\psi(x), \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

511. Supposons que la fonction F cherchée sur l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ est la dérivée d'ordre k d'une fonction continue f. Montrer que $f(x)$ est confondue avec un polynôme $P_-(x)$ sur $[a-\varepsilon, a]$ et avec un polynôme $P_+(x)$ sur $]a, a+\varepsilon]$, et de plus $\deg P_\pm < k$.

Soit $P(x) = P_+(x) - P_-(x)$. Alors

$$F(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [P(x)\,\theta(x-a)] = \sum_{l=1}^{k} C_k^l p^{(k-l)}(a)\,\delta^{(l)}(x-a).$$

512. $\delta'(g(x)) = h''(0)\operatorname{sgn} h'(0)\,\delta(x-h(0)) + h'(0)^2\,\delta'(x-h(0))$.

513. a) $(\lambda, 0)$, b) $(0, 1)$, c) $(-1, 0)$, d) $(-1, 1)$, e) $(-2, 1)$.

514. Utiliser la relation $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{F(tx)-F(x)}{t-1} = xF'(x)$, qui se démontre à partir de la définition de $F(tx)$.

515. Utiliser l'exercice 502.

516. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 0$. Montrer qu'il existe des $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et des $a_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} [\psi_n(x+a_n) - \psi_n(x)].$$

$$\left(\text{On peut par exemple poser } a_n = \frac{1}{n},\ \psi_n(x) = n\int_0^x \varphi(t)\,dt.\right)$$

517. a) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ est telle que $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x, y)\,dx = 0$ pour tous les $y \in \mathbf{R}$, alors $\varphi = \partial\psi/\partial x$ pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$;

b) $F = 1 \times f$.

518. a) Généraliser la méthode décrite dans l'indication de l'exercice 517.

b) $F = \sum\limits_{i=0}^{N} f_i \times \delta^{(i)}$.

519. La fonction $f'(x)$ n'est pas une distribution régulière à croissance modérée, puisque $|f'(x)| = e^x$ croît plus vite que tout polynôme. Intégrer $\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$ par parties.

520. Réponse : $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} c_k\delta(x-k\pi)$, où $\{c_k\}$ est une suite de nombres bilatérale quelconque.

521. Soit L le sous-espace de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ engendré par les fonctions de la forme $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - R^2)\right)\varphi(x)$, $x_i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} - x_j\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$. Montrer que F annule L et que L est de codimension 1 dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. (Par souci de simplicité étudier le cas $n = 2$.)

522. Utiliser le résultat de l'exercice 520.

523. Montrer que la fonction $\varphi = e^{-A(x)}(F(x) - B(x))$, où A et B sont des primitives respectivement pour a et b, est solution de l'équation $\varphi' = 0$.

524. Utiliser la transformation de Fourier et la formule de Plancherel.

525. Il existe des constantes C et N telles que $|c_n| \leqslant Cn^N$ pour $n \neq 0$. (Autrement dit $\ln(c_n)/\ln n$ est une suite majorée.)

526. Utiliser l'égalité $\sum e^{inx} = 2\pi \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} \delta(x-2\pi n)$. En déduire les équations différentielles que doit satisfaire la somme cherchée sur l'intervalle $]0, 2\pi[$. Réponse :

a) $\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)^2 - \dfrac{\pi^2}{12}$ pour $x \in [0\ ;\ 2\pi]$;

b) $\dfrac{\pi}{a}\,\dfrac{\operatorname{ch} a(x-\pi)}{\operatorname{sh} a\pi}$ pour $x \in [0\,;\,2\pi]$;

c) $(2\pi i)^{-k} \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} \delta^{(k)}(x-2\pi n)$;

d) $\dfrac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x$ pour $x \in]-\pi\,;\,\pi[$.

527. Non. $\left(\text{Par exemple } \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x)\,\delta(x), \text{ où } \{\varphi_n\} \text{ est une } \delta\text{-suite, n'existe pas.}\right)$

528. a) Utiliser le fait que $\ln(x^2+y^2) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \ln(x^2+y^2+\varepsilon^2)$ et que $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln(x^2+y^2+\varepsilon^2) = \dfrac{4\varepsilon^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2}$. Généraliser ensuite le résultat de l'exercice 487a) aux fonctions de deux variables. Réponse : $4\pi\delta(x, y)$.

b) Voir indication de l'exercice a). Réponse : $-4\pi\delta(x, y, z)$.

529. a) Réponse : 0 si $\mathcal{P}(x)$ n'admet pas de racines réelles ; $|\lambda-\mu|^{-1}\,(\delta(x-\lambda)+\delta(x-\mu))$ si $\mathcal{P}(x)$ possède deux racines réelles λ et μ ; n'existe pas si $\mathcal{P}(x)$ admet une racine multiple.

b) Passer aux coordonnées polaires.

Réponse : $\langle \delta(x^2+y^2-1), \varphi\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\alpha, \sin\alpha)\,d\alpha$.

c) Dans le domaine $\Omega = \mathbf{R}^2\backslash\{0\,;\,0\}$ on a l'égalité $\delta(x^2-y^2) = \dfrac{1}{2|x|}\,[\delta(x-y)+\delta(x-y)]$. La démonstration est commode à faire dans les nouvelles coordonnées $u = x$, $v = x^2-y^2$. $\delta(x^2-y^2)$ n'existe pas sur le plan tout entier.

d) Dans le domaine $\Omega = \mathbf{R}^3\backslash\{0\,;\,0\,;\,0\}$ on a

$$\delta(x^2+y^2-z^2) = \frac{1}{2|z|}\,[\delta(z-\sqrt{x^2+y^2})+\delta(z+\sqrt{x^2+y^2})],$$

ou en coordonnées cylindriques z, r, α : $\delta(x^2+y^2-z^2) = \dfrac{1}{2r}\,[\delta(z-r)+\delta(z+r)]$. Cette formule définit une distribution sur l'espace tout entier, puisque l'intégrale

$$\iint \varphi(x, y, \pm\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{dx\,dy}{|z|} = \iint \varphi(r\cos\alpha, r\sin\alpha, \pm r)\,dr\,d\alpha$$

converge pour tous les $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$. Si $\delta(x^2+y^2-z^2)$ existe alors la différence $\delta(x^2+y^2-z^2)-\dfrac{1}{2|z|}\cdot[\delta(z-\sqrt{x^2+y^2})+\delta(z+\sqrt{x^2+y^2})]$ a son support en $(0\,;\,0\,;\,0)$. Donc, c'est une combinaison linéaire des fonctions $\dfrac{\partial^{k+l+m}}{\partial x^k\,\partial y^l\,\partial z^m}\,\delta(x, y, z)$. De plus cette différence est homogène de degré -2 et est invariante par les *transformations de Lorentz* (les transformations linéaires de $\mathbf{R}^3$ conservant la forme $x^2+y^2-z^2$). Donc, elle est nulle. Vérifier l'existence de $\delta(x^2+y^2-z^2)$ d'abord sur les fonctions de base égales à 0 en $(0\,;\,0\,;\,0)$ et ensuite sur une fonction non nulle en $(0\,;\,0\,;\,0)$.

Réponse :

$$\delta(x^2+y^2-z^2) = \frac{1}{2|z|}\left(\delta(z-\sqrt{x^2+y^2})+\delta(z+\sqrt{x^2+y^2})\right).$$

§ 4. Espaces hilbertiens

1. Géométrie de l'espace hilbertien.

530. b) Considérer la catégorie des applications isométriques d'un espace préhilbertien sur tous les espaces hilbertiens.

531. Pour prouver la complétude, utiliser le théorème de Weierstrass et le résultat de l'exercice 427b).

532. On obtient à un facteur multiplicatif constant près les fonctions spéciales suivantes :

a) les *polynômes de Legendre* $P_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x^2)^n]$;

b) les *polynômes de Tchébychev* $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$;

c) les *polynômes de Laguerre* $L_n(x) = e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^n)$;

d) les *polynômes d'Hermite* $H_n(x) = e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$.

533. a) $f_k(z) = \sqrt{\frac{k+1}{S}}\left(\frac{z}{R}\right)^k$ où $S = \pi R^2$ est la surface du disque ;

b) $f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{\pi \cdot k!}}$.

534. Décomposer la fonction cherchée $g_x(z)$ suivant la base de l'exercice 533. Réponses :

a) $g_x(z) = \frac{1}{\pi\left(R - \frac{\bar{x}z}{R}\right)^2}$;

b) $g_x(z) = \frac{1}{\pi} e^{\bar{x}z}$.

535. Utiliser le résultat de l'exercice 533 pour prouver que toute suite de fonctions analytiques convergeant dans L_2 converge uniformément sur tout compact contenu dans le domaine donné.

536. a) $c_n = 0$ pour n pair, $c_n = \frac{2}{\pi i n}$ pour n impair ;

b) $c_n = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda - 2\pi i n}$ $(\lambda \neq 2\pi i n)$;

c) $c_n = (2\pi i n)^{-k}$ pour $n \neq 0$, $c_0 = 0$.

537. a) Plonger $L_2(]a, b[)$ dans $L_2(]0, 1[)$.

b) Montrer que toute fonction de $L_2(]a, b-1[)$ se prolonge de façon unique en une fonction de l'orthocomplément cherché dans $L_2(]a, b[)$.

538. b) Montrer qu'une norme hilbertienne est majorée par une norme uniforme mais que la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'étude de la suite $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e^{i\lambda k x}$, où $\{\lambda_k\}$ est une suite de nombres réels distincts.

539. Soit $f_\lambda(x)$ une fonction sur $\mathbf{R}$ égale à 1 au point λ et à 0 dans les autres points. Alors $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ est une base orthonormale de $L_2(\mathbf{R}, \mu)$. La correspondance $f_\lambda \leftrightarrow e^{i\lambda x}$ est un isomorphisme de bases, donc d'espaces hilbertiens.

540. Appliquer le processus d'orthogonalisation. Comparer aussi avec les exercices 531, 532 et 541.

541. La complétude résulte du fait que toute fonction continue sur [0, 1] peut être approchée par des combinaisons linéaires des fonctions φ_{mn}.

542. a) La fonction $\varphi_{12} = \varphi_1\varphi_2$ est orthogonale à toutes les fonctions du système de Rademacher.

b) Même démonstration que pour l'exercice 541.

543. L'orthocomplément est nul dans tous les cas.

544. a) L'espace des fonctions nulles pour $x \geqslant 0$;
b) $\{0\}$.
545. 30°, 60°, 90°.
546. a) 90°.

b) $\arccos \sqrt{\frac{a}{b}}$, où a est la longueur de la plus petite corde, b celle de la plus grande.

547. a) Vérification immédiate.
b) Soit $K = \mathbf{R}$. Définissons le produit scalaire par

$$(x, y) = \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2).$$

L'égalité $(x+y, z) = (x, z)+(y, z)$ équivaut à la relation $||x+y+z||^2+||x||^2+||y||^2+ +||z||^2 = ||x+y||^2+||y+z||^2+||x+z||^2$. Cette relation se déduit à partir de l'identité du parallélogramme appliquée à tous les parallélogrammes susceptibles d'être formés avec les sommets d'un parallélépipède de dimension trois. Prouver ensuite par récurrence sur n que $(nx, z) = n(x, z)$ et en déduire que $(\lambda x, z) = \lambda(x, z)$ pour les λ rationnels. Comme (x, y) dépend continûment de x par construction, l'égalité $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ est valable pour tous les λ réels. Si le corps est complexe considérer d'abord le réelifié $H_{\mathbf{R}}$ de l'espace hilbertien H (c'est-à-dire le même espace H muni seulement de l'addition et de la multiplication par un nombre réel). Alors, d'après ce qui a été déjà démontré, il existe sur $H_{\mathbf{R}}$ un produit scalaire (réel) $(x, y)_{\mathbf{R}}$ tel que $||x||^2 = (x, x)_{\mathbf{R}}$. Définir le produit scalaire sur H par : $(x, y) = (x, y)_{\mathbf{R}}+(i(x, iy)_{\mathbf{R}}$. Vérifier que cette expression possède bien les propriétés requises. $\Big($Utiliser la relation $(x, ix)_{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}(||x+ix||^2-||x||^2-||ix||^2) = 0$, puisque $||\lambda x||^2 = |\lambda|^2 ||x||^2.\Big)$

548. Utiliser l'identité $||x+e^{i\theta}y||^2 e^{i\theta} = ||x||^2 e^{i\theta}+(x, y)+(y, x)e^{2i\theta}+||y||^2 e^{i\theta}$ et la relation $\sum_{k=1}^{N} e^{\frac{2\pi ik}{N}} = \sum_{k=1}^{N} e^{\frac{4\pi ik}{N}} = 0$, pour $N \geqslant 3$.

549. Vérfier que la suite $y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ admet une limite forte et que les vecteurs $z_i = x_i - y$ sont orthogonaux entre eux et au vecteur y.

550. b) $\Rightarrow$ c) d'après le corollaire du théorème de Banach-Steinhauss (de convergence d'une suite faiblement convergente).

551. Soit $L(S)$ l'adhérence de l'enveloppe linéaire de S. Alors $L(S)^{\perp} = S^{\perp}$. Donc, $(S^{\perp})^{\perp} = L(S)$ d'après le théorème de l'orthocomplément.

552. Mettre H sous la forme $\overline{L} \oplus L^{\perp}$.

2. Opérateurs dans l'espace hilbertien.

553. a) $\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A+A^*)$, $\operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A-A^*)$,
b) $AA^*-A^*A = 2i(\operatorname{Im} A \cdot \operatorname{Re} A - \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Im} A)$,
c) $VV^* = (\operatorname{Re} V)^2+i(\operatorname{Im} V \cdot \operatorname{Re} V - \operatorname{Re} V \cdot \operatorname{Im} V)+(\operatorname{Im} V)^2$.

554. a) Posons $H_1 = PH$, $H_2 = (1-P)H$. Vérifier que H_1 et H_2 sont orthogonaux, que leur somme est égale à H et que P est un projecteur sur H_1 parallèlement à H_2.

b) Posons $P = \frac{S+1}{2}$. Vérifier que P est un orthoprojecteur.

555. Utiliser l'égalité $||A|| = \sup_{x, y} \frac{|(Ax, y)|}{||x|| \cdot ||y||}$.

556. a) Si k et l sont pairs, l'inégalité voulue peut se mettre sous la forme $(A^{k/2}x, A^{l/2}x) \leqslant ||A^{k/2}x|| \cdot ||A^{l/2}x||$. Si k et l sont impairs, introduisons le nouveau produit

scalaire $(x, y)_A = (Ax, y)$. L'inégalité cherchée s'écrit alors $\left(A^{\frac{k-1}{2}}x, A^{\frac{l-1}{2}}x\right)_A \leqslant$ $\leqslant \left\| A^{\frac{k-1}{2}}x \right\|_A \cdot \left\| A^{\frac{l-1}{2}}x \right\|_A$.

b) Déduire de a) que $\|Ax\|^{2(n+1)} \leqslant (Ax, x)^n \cdot (A^{n+2}x, x)$ et de cette dernière inégalité, l'inégalité voulue.

557. Montrer que la suite de formes quadratiques $Q_{A_n}(x) = (A_n x, x)$ tend ponctuellement vers une forme quadratique $Q_A(x)$. Utiliser ensuite l'inégalité de l'exercice 556b).

558. a) $AP = PAP$, b) $AP = PA$.

559. a) Il suffit d'étudier le cas $\dim H = 2$,

b) $\cos^2 \varphi = \operatorname{tr} P_1P_2P_1 = \|P_1P_2P_1\|$.

c) Supposons que les vecteurs unitaires ξ_i et η_i engendrent respectivement les sous-espaces L_i et M_i, $i = 1, 2$. La condition de congruence des couples (L_1, L_2) et (M_1, M_2) est exprimée par l'égalité $|(\xi_1, \xi_2)| = |(\eta_1, \eta_2)|$ qui équivaut à $\operatorname{tr} P_1P_2P_1 = \operatorname{tr} Q_1Q_2Q_1$.

560. a) Les opérateurs $P_1P_2P_1$ et $1 - P_1P_2P_1 = P_1(1-P_2)P_1 + (1-P_1)$ sont positifs.

b) Le rang de l'opérateur $P_1P_2P_1$ est $\leqslant$ à ceux de P_1 et P_2.

c) On peut considérer que $L_2 = M_2$ quitte à remplacer le couple (M_1, M_2) par un couple congru. Considérer la projection des vecteurs générateurs de L_1 et M_1 sur $L_2 = M_2$ et sur l'orthocomplément de cet espace. Voir également l'exercice 559.

d) *Première méthode*: développer le raissonnement du numéro c). *Deuxième méthode.* On dira que le couple (L_1, L_2) est décomposable si l'espace H se représente par $H = H' \oplus H''$ de telle sorte que $L_i = L_i' \oplus L_i''$, où $L_i' = L_i \cap H'$, $L_i'' = L_i \cap H''$. On dira dans ce cas que le couple (L_1, L_2) est la somme des couples (L_1', L_2') et (L_1'', L_2''). Montrer que tout couple est la somme de couples indécomposables et que les couples indécomposables n'existent que pour $\dim H = 1$ ou 2. La dernière proposition découle du fait que si ξ est vecteur propre de l'opérateur $P_1P_2P_1$, alors l'espace H' construit sur ξ et $P_2\xi$ est invariant par P_1 et P_2. Il en sera donc de même de $H'' = (H')^{\perp}$. D'où il vient que le couple initial est décomposable si seulement $\dim H > 2$.

e) Cette valeur est égale à $\sin \varphi$, où φ est le plus grand des angles de L_1 et de L_2.

561. a) Si U est unitaire et $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une base de H_1, alors $\{Ue_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un système orthonormal dans H_2. Sa complétude résulte de ce que $x \perp Ue_\alpha$ entraîne que $U^{-1}x \perp e_\alpha$.

b) Si $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une base orthonormale dans H_1 et $\{Ue_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une base orthonormale dans H_2, alors

$$x = \sum_\alpha (x, e_\alpha)e_\alpha, \qquad y = \sum_\beta (y, e_\beta)e_\beta, \qquad \forall x, \forall y \in H_1.$$

Donc $Ux = \sum_\alpha (x, e_\alpha)Ue_\alpha$, $Uy = \sum_\beta (y, e_\beta)Ue_\beta$ et $(Ux, Uy) = \sum_{\alpha, \beta} (x, e_\alpha)\overline{(y, e_\beta)} \times$ $\times (Ue_\alpha, Ue_\beta) = \sum_\alpha (x, e_\alpha)\overline{(y, e_\beta)} = (x, y)$.

562. a) La condition $y \perp \operatorname{im} A$ équivaut à $(y, Ax) = 0$ pour tous les $x \in H$ et la condition $y \in \ker A^*$ à la relation $(A^*y, x) = 0$ pour tous les $x \in H$. Mais $(y, Ax) = (A^*y, x)$.

b) Le théorème de l'orthocomplément (voir aussi exercice 551) nous dit que l'égalité $(\ker A)^{\perp} = \overline{(\operatorname{im} A^*)}$ est équivalente à $\ker A = (\operatorname{im} A^*)^{\perp}$ démontrée dans a) (il faut remplacer A par A^*).

563. Utiliser la relation

$$\|(A_n - A)x\|^2 = \|A_n x\|^2 + \|ax\|^2 - 2 \operatorname{Re}(A_n x, Ax).$$

564. Soient $\{x_\alpha\}$ une base de H, $E_{\alpha\beta}$ un opérateur envoyant x_β dans x_α et les autres vecteurs de base dans 0. Vérifier que

1) $E_{\alpha\beta}^* = E_{\beta\alpha}$;

2) $E_{\alpha\beta}E_{\gamma\delta} = E_{\alpha\delta}$ si $\beta = \gamma$, sinon $E_{\alpha\beta}E_{\gamma\delta} = 0$;

3) si P est un orthoprojecteur tel que $E_\alpha P = P$, alors $P = 0$ ou E_α.

Montrer que tout système d'opérateurs jouissant de ces propriétés est conçu comme suit : il existe une base hilbertienne $\{y_\alpha\}$ telle que $E_{\alpha\beta}$ envoie y_β dans y_α et les autres vecteurs de base dans 0. Appliquer cette proposition au système $\sigma(E_{\alpha\beta})$, où σ est l'homomorphisme donné.

565. Si un idéal I contient au moins un opérateur non nul, il contiendra tous les opérateurs de rang fini, donc tous les opérateurs compacts. Si I contient un opérateur non compact, alors il contient un orthoprojecteur sur un espace infini et par suite tous les opérateurs. Réponse : $\{0\}$, $\mathcal{K}(H)$, $\mathcal{L}(H)$.

566. Utiliser les relations

$$\sup_{x \in L} \frac{(PAPx, x)}{(x, x)} = \sup_{x \in L} \frac{(APx, Px)}{(Px, Px)} \cdot \frac{(Px, Px)}{(x, x)} \leqslant \sup_{y \in PL} \frac{(Ay, y)}{(y, y)},$$

$$\sup_{x \in L} \frac{(PAPx, x)}{(x, x)} \geqslant \sup_{x \in L \cap PH} \frac{(PAPx, x)}{(x, x)} = \sup_{x \in L \cap PH} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

567. a) Montrer par récurrence que $\|A\|^{1/2} \cdot 1 \gg B_n \gg 0$, $B_n^2 \ll A$ et utiliser le résultat de l'exercice 557.

b) Prouver l'unicité d'abord pour le cas $\ker A = 0$ en utilisant le fait que la racine carrée B est la limite de polynômes de A, donc qu'elle commute avec n'importe quelle autre racine carrée C ; ceci entraîne notamment l'égalité $(B+C)(B-C)x = 0$, d'où $(B-C)x = 0$. Le cas général découle de la relation $\ker C = \ker C^2$ qui est valable pour tous les $C \gg 0$.

568. b) Les opérateurs R et S vérifient les relations $R^2 = AA^*$, $S^2 = A^*A$. L'opérateur V est défini de façon unique seulement sur $\operatorname{im} S$, l'opérateur U est défini mod $\ker R$.

c) Les opérateurs A qui s'écrivent sous la forme cherchée sont tels que $\dim \ker A = \dim \ker A^*$. Mais $\dim \ker T = \dim \ker T^*$.

569. $V^*V = P_1$; $UU^* = P_2$.

570. Posons $R = (AA^*)^{1/2}$ et définissons U sur $\operatorname{im} A^*$ par $UA^*x = Rx$.

571. a) Utiliser le fait que pour deux bases quelconques $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ et $\{\varphi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ on a

$$\sum_{\beta \in \mathbf{B}} \|Ax_\beta\|^2 = \sum_{\beta \in \mathbf{B}} \sum |(Ax_\beta, x_\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\beta \in \mathbf{B}} |x_\beta, Ax_\gamma^*| = \sum_{\gamma \in \Gamma} \|A^*x_\gamma\|^2.$$

b) La convergence de la série $\sum_{\gamma \in \Gamma} (Ay_\gamma, By_\gamma)_H$ résulte d'une double application de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski : la première fois au produit scalaire sur H, la deuxième fois, au produit scalaire sur $l_2(\Gamma)$.

c) Soient Γ_0 un sous-ensemble fini de Γ, P_{Γ_0} un projecteur sur le sous-espace correspondant de H. Evaluer la norme de la différence de A et PAP dans $L_2(H)$.

d) L'application de $H \otimes H'$ dans $L_2(H)$ associe au vecteur $x \otimes f$ l'opérateur A : $y \to f(y)x$.

e) Soit $\{f_\beta\}_{\beta \in \mathbf{B}}$ une base de $L_2(X, \mu)$. Montrer que A est défini par le noyau $K(x_1, x_1) = \sum_{\beta_1\beta_2} (Af_{\beta_1}, f_{\beta_2}) f_{\beta_1}(x_1) \overline{f_{\beta_2}(x_2)}$.

572. a) Résulte de la définition.

b) Montrer que la multiplication à droite par l'opérateur borné $B \in L_2(H)$ est un opérateur borné dans $L_2(H)$. Désignons-le par $M(B)$. Montrer que $M(B)^* = M(B^*)$.

c) Vérifier l'égalité $\|A\|_1 = \sup_{U, V} |\operatorname{tr} UAV|$, où U et V parcourent l'ensemble de tous les opérateurs partiellement isométriques.

d) Tout opérateur $A \in \mathcal{L}_1(H)$ définit une fonctionnelle linéaire f_A sur $\mathcal{K}(H)$: $f_A(K) = \operatorname{tr} AK$. Tout opérateur borné B définit une fonctionnelle linéaire F_B sur $\mathcal{L}_1(H)$: $F_B(A) = \operatorname{tr} AB$. Pour prouver que c'est un système complet de fonctionnelles utiliser le fait que les opérateurs de rang fini forment un ensemble dense dans $\mathcal{K}(H)$ et $\mathcal{L}_1(H)$.

573. a) $f_1(x) = e^{2\pi ix}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $f_2(x) = e^{-2\pi ix}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Les autres fonctions propres sont des fonctions quelconques de l'orthocomplément de $\{f_1, f_2\}$, les valeurs propres sont les zéros.

b) Récrire l'équation pour la fonction propre sous la forme $\lambda f(x) = \int_0^x y f(y)\,dy + x\int_x^1 f(y)\,dy$. Montrer que pour $\lambda = 0$ il n'existe pas de solutions et que pour $\lambda \neq 0$ la fonction $f(x)$ est deux fois différentiable et est solution de l'équation $\lambda f'' + f = 0$.

Réponse : $f_n(x) = \sin \pi(n+1/2)x$, $\lambda_n = \pi^{-2}(n+1/2)^{-2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

574. a) Utiliser les fonctions $g_x(z)$ construites dans l'exercice 534.

c) Mettre $\dim H$ sous la forme $\sum_k |\xi_k|^2$, où $\{\xi_k\}$ est une base de H.

d) Commencer par les opérateurs de rang 1.

575. Soient $l_n(x) = e^{2\pi i n x}$ une base de $L_2\,[0, 1]$,

$$\mathrm{tr}_N(A) = \sum_{n=-N}^{+N} (Al_n, l_n), \qquad s_k(A) = \frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k} tr_N(A).$$

Montrer que pour $A \in \mathcal{L}_1(H)$ on a $\lim_{k\to\infty} s_k(A) = \mathrm{tr}\,A$. Vérifier ensuite que pour un opérateur intégral de noyau $K(x, y)$:

$$s_k(A) = \int_0^1\int_0^1 K(x, y)\left[\frac{\sin(2k+1)\pi(x-y)}{\sin \pi(x-y)}\right]^2 dx\,dy.$$

En déduire que $\lim_{k\to\infty} s_k(A) = \int_0^1 K(x, x)\,dx$ pour un noyau continu.

CHAPITRE 4

TRANSFORMATION DE FOURIER ET ÉLÉMENTS D'ANALYSE HARMONIQUE

§ 1. Produits de convolution sur un groupe commutatif

1. Produits de convolution des fonctions de base.

576. a) Désignons par δ_g l'élément de $K[G]$ correspondant à la fonction égale à 1 au point g et à 0 dans les autres points.

Expliciter la condition de commutation de $a \in K[G]$ et de δ_g.

b) La condition $a(gh) = a(hg)$ peut encore s'écrire sous la forme $a(h) = a(ghg^{-1})$.

c) Oui.

577. a) Soient $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, a, l'élément générateur du groupe C_n (en écriture additive). Posons $e_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1} \varepsilon^k \delta_{ka}$. Vérifier que $e_k * e_j = 0$ pour $k \neq j$, $e_k * e_k = e_k$.

b) Oui pour $n = 2$. Non pour les grands n. On vérifie que

$$\mathbf{R}[\mathbf{C}_{2k}] \approx \mathbf{R}+\mathbf{R}+\underbrace{\mathbf{C}+\ldots+\mathbf{C}}_{k-1}, \qquad \mathbf{R}[\mathbf{C}_{2kn}] = \mathbf{R}+\underbrace{\mathbf{C}+\ldots+\mathbf{C}}_{k}.$$

578. A toute fonction $a(g)$ associons les nombres $a_0 = \sum_{g \in S_3} a(g)$ et $a_1 = \sum_{g \in S_3} a(g) \operatorname{sgn} g$, où $\operatorname{sgn} g$ est la parité de la permutation de g : $\operatorname{sgn} g = \prod_{i<j} \frac{g(i)-g(j)}{i-j}$. Montrer que les applications $a \to a_0$ et $a \to a_1$ sont des homomorphismes de $\mathbf{R}(S_3)$ sur $\mathbf{R}$. Soient par ailleurs e_1, e_2, e_3 des vecteurs sur le plan dont la somme est nulle. A tout élément $g \in S_3$ correspond une application linéaire $T(g)$ du plan agissant d'après la formule $T(g)e_i = e_{g^{-1}(i)}$. Montrer que l'application $a \mapsto \sum a(g)\, T(g)$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}[S_3]$ sur $\mathrm{Mat}_2\mathbf{R}$. Utiliser ces isomoprhismes pour construire l'isomorphisme cherché.

579. Soit φ une application de G sur une K-algèbre unitaire A telle que $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2)$ et $\varphi(1) = 1$. Elle se prolonge alors de façon unique par continuité en un isomorphisme j : $K[G] \to A$ à l'aide de la formule $a \to \sum a(g)\,\varphi(g)$. Si l'on s'affranchit de la condition $\varphi(1) = 1$, un élément universel sera l'application triviale G dans l'algèbre nulle.

580. Réponse : $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ est une fonction linéaire par morceaux continue à support borné sur la droite ; le graphe de cette fonction est une ligne polygonale de sommets $(a+c, 0)$, $(b+c, b-a)$, $(a+d, b-a)$, $(b+d, 0)$. (On admet que $a \leqslant b$, $c \leqslant d$, $b-a \leqslant d-c$.)

581. Pour les fonctions en escalier la proposition découle du résultat de l'exercice 580. Le cas général s'obtient à partir de la majoration $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty * \|g\|_1$.

582. a) $\pi\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{1}{x^2+(a+b)^2}$ $(a > 0, b > 0)$.

b) $\sqrt{\frac{\pi ab}{a+b}}\exp\left(\frac{-x^2}{2(a+b)}\right)$ $(a > 0, b > 0)$.

583. Voir démonstration du théorème 4 chap. IV.

584. Etablir l'égalité $S(\varphi) = \int_G \varphi(g)\, T(g)\, d\mu(g)$.

585. a) La propriété 3 résulte de la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue. b) Il suffit de vérifier la propriété 3 pour des voisinages sphériques.

586. Mettre $S(f_k) - T(a)$ sous la forme $\int_G f_k(g)\, [T(g) - T(a)]\, d\mu(g)$.

587. Utiliser la formule $\partial^k(\varphi * \psi) = (\partial^k \varphi) * \psi$.

588. Utiliser les résultats des exercices 585, 586 et 587.

589. Utiliser l'exercice 584. Réponse : $S(f)^* = S(\overline{f(-x)})$ (voir exercice 591).

590. L'existence de $f_1 * f_2$ découle du fait que $f(x-y)$ appartient à $L_2(G, \mu)$ comme fonction de y pour tout x. La mesurabilité résulte de la définition de l'intégrale comme limite de sommes intégrales. La convolée est bornée en vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski.

591. Effectuer des changements de variables convenables.

592. Se démontre par un calcul immédiat. (Voir exercice 629.)

593. Utiliser le résultat de l'exercice 592 et montrer que $f * e_k = (f, e_k) e_k$ pour toute fonction $f \in L_1(\mathbf{T}^n, dt)$.

594. On peut poser par exemple $f_k(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_k(t_j)$, où

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{s=-2k}^{2k} (2(k+1-|s|))\, e_s(t) = \frac{1}{2k+1} \left[\frac{\sin (2k+1)\pi t}{\sin \pi t}\right]^2.$$

595. Utiliser les exercices 586 et 594.

596. a) Réponse : $B_1 = x - 1/2$, $B_2 = x^2 - x + 1/6$, $B_3 = x^3 - 3x^2/2 + x/2$, $B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1/30$.

b) Réponse : $-B_2/2$. Résultat général dans l'exercice 612b).

597. a) $B(\alpha+1, \beta+1)\, \theta(x) x^{\alpha+\beta+1}$.

b) $$\begin{cases} \dfrac{e^{bx} - e^{ax}}{b-a}\, \theta(x) & \text{pour} \quad a = b, \\ x e^{ax}\, \theta(x) & \text{pour} \quad a = b. \end{cases}$$

598. Montrer que si $f \in L_p(G, \mu)$, $g \in L_q(G, \mu)$, $h \in L_s(G, \mu)$ alors la fonction $\varphi(x, y) = f(x-y)\, g(y)\, h(x)$ appartient à $L_t(G \times G, \mu \times \mu)$ où $2/t = 1/p + 1/q + 1/s$.

En déduire la proposition annoncée en posant $1/s = 1 - 1/r$, $t = 1$. Voir exercices 424 et 425.

2. Produits de convolution des distributions.

599. a) δ_{a+b} ; b) $\theta(x-a)$; c) δ ; d) 0.

600. $Lf = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \delta^{(k)}\right) * f$.

601. Utiliser les identités $\langle f, 1 * \varphi\rangle = \langle f * 1, \varphi\rangle$ et $1 * \varphi = \langle 1, \varphi\rangle \cdot 1$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

602. Utiliser l'identité $(f_1 * f_2)'' = f_1' * f_2'$. Réponse : $\delta_{a+c} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c} + \delta_{b+d}$.

603. On peut se servir de la formule $\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \langle f_1 \times f_2, \mathring{\varphi}\rangle$ et des relations $f_1^{\vee} \times f_2^{\vee} = (f_1 \times f_2)^{\vee}$, $(f^{\vee}, \varphi^{\vee}) = (f, \varphi)$.

604. 605. Utiliser la définition du produit de convolution par le produit direct.

606. Utiliser la définition de la topologie de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ et de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ainsi que le théorème de la représentation de f sur chaque compact sous la forme de la dérivée d'une fonction régulière.

607. Poser $\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{T}^n} \int_{\mathbf{T}^n} f_1(t)\, f_2(s)\, \varphi(t+s)\, dt\, ds$.

608. *Première méthode.* Vérifier que $\{\varphi_N(t)\}$ possède les propriétés d'une δ-suite (voir exercice 585). *Deuxième méthode.* Exprimer $\langle \varphi_N, f\rangle$ en fonction des coefficients de Fourier de f.

609. Utiliser les résultats des exercices 608 et 593.

610. Utiliser l'indication de l'exercice 609.

611. a) $A_h = S\left(\frac{\delta_{-h}-\delta_h}{2h}\right)$,

b) $B_h = S\left(\frac{\delta_h+\delta_{-h}-2\delta}{h^2}\right)$.

612. a) Réponse : $k!\,(1-\delta)$ pour $k > 0$.

b) Utiliser le résultat du numéro a) et la commutation du produit de convolution et de la différentiation.

613. a) Utiliser l'identité $\frac{\sin 2\pi kt}{\sin \pi t} = \sum_{i=1}^{k} \cos\,(2i-1)\pi t$.

Réponse : $f * e_k = -i \operatorname{sgn} k e_k$.

b) Utiliser le résultat de a) et de l'exercice 609.

Réponse : $f * f = 1-\delta$.

614. Utiliser la formule $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2\,|a|}\,(\delta(x-a)+\delta(x+a))$.

Réponse : la fonction régulière définie par

$$(f_1 * f_2)\,(x, y) = \begin{cases} 1/4S \text{ si les segments } r_1,\ r_2,\ \sqrt{x^2+y^2} \text{ forment un triangle d'aire } S, \\ 0 \text{ si } \sqrt{x^2+y^2} \notin [\,|r_1-r_2|,\ r_1+r_2]. \end{cases}$$

615. Montrer que f s'exprime en fonction de f_1 et f_2 par la formule $f(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty K(r_1, r_2\,;\ r)\, f_1(r_1)\, f_2(r_2)\, dr_1\, dr_2$ où $K(r_1, r_2\,;\ r)$ est une fonction localement sommable. Pour le calcul de K se servir du résultat de l'exercice 614. Réponse : $K(r_1, r_2\,;\ r) = 0$ si les segments r_1, r_2 et r ne forment pas un triangle : $K(r_1, r_2\,;\ r) = 1/4S$ s'ils forment un triangle d'aire S.

616. a) Comme $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$ est un sous-espace dense de $\mathcal{E}_+(\mathbf{R})$, toute fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{E}_+(\mathbf{R})$ définit une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ et est elle-même définie de façon unique par cette distribution. Soit $\alpha \in \mathcal{E}_-(\mathbf{R})$. Alors la multiplication par α est un opérateur continu de $\mathcal{E}_+(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Donc, l'opérateur adjoint envoie $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{E}'_+(\mathbf{R})$. D'où il résulte que $\mathcal{E}'_+(\mathbf{R})$ contient $\mathcal{D}'_-(\mathbf{R})$. Inversement, si $f \in \mathcal{D}'_-(\mathbf{R})$ et $\alpha \in \mathcal{E}_-(\mathbf{R})$ est la fonction identiquement égale à 1 au voisinage de supp f, alors $f = \alpha f \in \mathcal{E}'_+(\mathbf{R})$.

b) *Première méthode* : $\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \langle f_1 \times f_2, \mathring{\varphi}\rangle$, où $\mathring{\varphi}(x, y) = \varphi(x+y)$. On utilise ici le fait que supp $(f_1 \times f_2)$ et supp $\mathring{\varphi}$ ont une intersection compacte si $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'_\pm(\mathbf{R})$ et $\varphi \in \mathcal{E}_\mp(\mathbf{R})$.

Deuxième méthode : définir d'abord le produit de convolution de $\mathcal{D}'_\pm(\mathbf{R})$ et $\mathcal{E}_\pm(\mathbf{R})$ par la formule $(f * \varphi)\,(x) = \langle f, T(-x)\varphi^\vee\rangle$ et poser ensuite $\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \langle f_1, \widetilde{f_2} * \varphi\rangle$.

617. a), b), c) se vérifient immédiatement.

d) Utiliser le résultat de c) la dépendance continue de f_α par rapport à α pour $\alpha > 0$ et la continuité de la différentiation dans $\mathcal{D}'_+(\mathbf{R})$. Réponse : $\lim_{\alpha \to 0} f_\alpha = \delta$.

618. Pour $\alpha > -n$ poser $I(\alpha) = S\left(f^{(n)}_{\alpha+n}\right|$ où f_α est la fonction de l'exercice 617. Vérifier l'indépendance par rapport au choix de n (exercice 617c)).

619. a) Réponse : $2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ pour $x \leqslant 1$, $2\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{\pi}}$ pour $x \geqslant 1$.

b) Réponse : $\sqrt{\frac{x}{\pi}}$. c) Réponse : $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \sqrt{x}$.

620. Utiliser l'égalité $f = \frac{1}{\pi}\delta(x^2+y^2-1)$ et le résultat de l'exercice 614. Réponse :

$$(f*f)(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2\sqrt{(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)}} & \text{pour} \quad x^2+y^2 < 4, \\ 0 & \text{pour} \quad x^2+y^2 \geqslant 4. \end{cases}$$

621. Utiliser l'égalité $f = \frac{1}{2\pi}\delta(x^2+y^2+z^2-1)$ et l'indication de l'exercice 614. Réponse :

$$(f*f)(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{pour} \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant 4, \\ 0 & \text{pour} \quad x^2+y^2+z^2 \geqslant 4. \end{cases}$$

§ 2. Transformation de Fourier

1. Caractères d'un groupe commutatif.

622. $\chi_k(l \bmod n) = e^{2\pi i k l/n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

623. Utiliser le résultat de l'exercice 622 et le fait que tout groupe commutatif fini est la somme directe de groups cycliques.

624. a) $\chi_z(n) = z^n$, $z \in \mathbf{C}^*$;

b) $\chi_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbf{C}$;

c) $\chi_{v,w}(z) = e^{vz+w\bar{z}}$, $v, w \in \mathbf{C}$;

d) $\chi_{\lambda,\varepsilon}(x) = |x|^\lambda (\operatorname{sgn} x)^\varepsilon$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\varepsilon = 0, 1$;

e) $\chi_{\lambda,n}(z) = |z|^\lambda (\operatorname{sgn} z)^n$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$; $\operatorname{sgn} z = z/|z|$.

625. Soit U_ε un voisinage d'un caractère χ_0, défini par l'inégalité $|\chi(x)-\chi_0(x)| < \varepsilon$ pour tous les $x \in G$. Montrer que pour $\varepsilon \leqslant \sqrt{3}$ ce voisinage ne contient pas de points de $\hat{G}$ différents de χ_0 (Utiliser le fait que l'ensemble des nombres complexes de la forme $\chi(x)\overline{\chi_0(x)}$, $x \in G$, est un sous-groupe de $\mathbf{T}$.)

626. Montrer que $\hat{G}$ s'identifie à un sous-ensemble fermé dans le produit $\prod_{g \in G} \mathbf{T}$ qui est compact pour la convergence en coordonnees (*théorème de Tikhonov*).

627. Montrer que la distribution $\chi'(x)$ appartient à l'espace de dimension un engendré par $\chi(x)$.

628. Faire un changement de variables dans l'intégrale définissant le produit de convolution.

629. Utiliser le résultat de l'exercice 628.

630. Utiliser le résultat des exercices 629 et 595.

631. A tout homomorphisme $\varphi : G \to H$ est associé un homomorphisme $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G}$ agissant d'après la formule

$$\hat{\varphi}(\chi)(x) = \chi(\varphi(x)), \qquad \chi \in \hat{H}, x \in G.$$

632. Réponse : $\hat{L}$ est confondu avec l'espace dual L'. Pour le prouver, considérer les restrictions d'un caractère à des sous-espaces de dimension un dans L et montrer que χ est de la forme $\chi(x) = e^{if(x)}$, où $f \in L'$.

633. a) Tout caractère $\chi \in \hat{\mathbf{Q}}_p$ est de la forme $\chi_\lambda(x) = e^{2\pi i\{\lambda x\}}$, où $\lambda \in \mathbf{Q}_p$, et $\{\cdot\}$ est une application de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (« la partie fractionnaire »). Réponse : $\hat{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{Q}_p$.

b) Tout caractère $\chi \in \hat{\mathbf{Z}}_p$est de la forme $\chi_r(x) = e^{2\pi i\{rx\}}$, où r est un nombre rationnel de la forme m/p^n défini mod 1. Réponse : $\hat{\mathbf{Z}}_p \simeq \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

c) Les caractères du groupe $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ s'identifient aux caractères du groupe $\mathbf{Q}_p$, triviaux sur $\mathbf{Z}_p$. Réponse : $(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^\wedge \approx \mathbf{Z}_p$.

634. L'exactitude en G_1 signifie que $\hat{p}$ est un monomorphisme, c'est-à-dire que tout caractère non trivial de $G_1 = G/G_0$ définit un caractère non trivial de G. L'exactitude en $\hat{G}$ signifie que les caractères de G triviaux sur G_0 et eux seuls se représentent par $\hat{p}(\chi_1)$. Enfin, l'exactitude en $\hat{G}_0$ signifie que tout caractère du groupe G_0 est la restriction d'un caractère du groupe G. Cette proposition se montre comme le théorème de Hahn-Banach par une récurrence transfinie.

635. Utiliser le fait que le groupe $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^\wedge$ est isomorphe à la somme directe des groupes $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ étendue à tous les nombres premiers p (toute fraction m/n se représente de façon unique sous forme d'une somme de fractions dont les numérateurs sont les puissances de nombres premiers). Réponse : $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^\wedge \approx \prod_p \mathbf{Z}_p$.

636. b) Se servir de la décomposition des nombres de l'intervalle [0, 1] en une fraction binaire infinie.

637. La transformée de Fourier de f est invariante par la multiplication par la suite $\{e^{2\pi i n\alpha}\}$.

638. Prouver cette proposition pour les fonctions en escalier.

639. Soit χ la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}_p$. Tout élément de $\mathcal{D}(G)$ est une combinaison linéaire de la forme

$$\sum c_k \chi(a_k x + b_k), \text{ où } c_k \in \mathbf{C},\ a_k, b_k \in \mathbf{Q}_p.$$

Montrer que la fonction χ est invariante par l'identification de $\hat{\mathbf{Q}}_p$ et $\mathbf{Q}_p$ de l'exercice 633a)

640. Se servir de l'équivalence des systèmes de semi-normes

$$p_k(f) = \sup_{t \in \mathbf{T}} |f^{(k)}(t)| \quad \text{et} \quad p'_k(f) = \int_{\mathbf{T}} |f^{(k)}(t)|\, dt.$$

641. a) La matrice $\begin{pmatrix} f(0) & f(x) \\ f(-x) & f(0) \end{pmatrix}$ est définie positive si et seulement si $f(0) \geqslant 0$, $f(x) = \overline{f(-x)}$ et $f(0)^2 - |f(x)|^2 \geqslant 0$.

b) Se servir de la positivité de la matrice

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(x) & f(x-y) \\ f(-x) & f(0) & f(-y) \\ f(y-x) & f(y) & f(0) \end{pmatrix}.$$

c) Se servir de a) et b).

642. a) La définition positive de la matrice A signifie que $\sum_{kj} a_{kj} z_k \bar{z}_j \geqslant 0$ pour toutes les collections $\{z_k\} \in \mathbf{C}^n$.

b) Le produit par composantes de matrices définies positives est une matrice définie positive. (Pour le prouver utiliser le fait qu'une matrice définie positive est la somme de matrices définies positives de rang 1.

c) Mettre l'expression $\sum (\varphi * \varphi^*)(x_k - x_j) z_k \bar{z}_j$ sous la forme $\int_G |f(x)|^2\, dx$ où $f(y) = \sum_k z_k \varphi(y - x_k)$.

643. La matrice A correspondant à l'ensemble de tous les éléments de G est une matrice de l'opérateur $S(f)$. L'image de cet opérateur par la transformation de Fourier est un opérateur de multiplication par $\tilde{f}$.

644. $\sum_{kj} \tilde{\varphi}(\chi_k \chi_j^{-1}) z_k \bar{z}_j = \int_G \varphi(x) \left| \sum_k z_k \chi_k(x) \right|^2 d\mu(x)$.

2. Séries de Fourier.

645. a) $c_n = c_{-n}$; b) $c_n = -c_{-n}$; c) $c_n = \overline{c_{-n}}$.

646. Réponse : $l = k+1$. Représenter f par la somme d'une fonction $(k+1)$-différen-

tiable et d'une combinaison linéaire de fonctions de base (pour $k = 0$, de fonctions de la forme $|t-a|$).

647. Il suffit de traiter le cas $k = 0$. La première proposition découle de l'inclusion $C[\mathbf{T}] \subset L_2(\mathbf{T}, dt)$; la seconde, de la convergence uniforme de la série de Fourier.

648. Réponse : $\sum_{n \in \mathbf{Z}} n^{2k} |C_n|^2 < \infty$.

649. Utiliser la parité de $f(t)$, l'égalité $f'(t) = \pi \operatorname{cotg} \pi t$ pour $0 < t < 1$ et la relation $\dfrac{\sin 2\pi nt}{\sin \pi t} = 2 \sum_{k=1}^{n} \cos (2k-1)\pi t$. Réponse : $c_0 = -\ln 2$ $\Bigg($pour calculer ce coefficient, se servir de la relation $I = \int_0^1 \ln \sin \pi t \, dt = \ln 2 + \int_0^1 \ln \sin \frac{\pi t}{2} \, dt + \int_0^1 \ln \cos \frac{\pi t}{2} \, dt = \ln 2 + 2I\Bigg)$; $c_n = -\dfrac{1}{2|n|}$ pour $n \neq 0$.

650. a) $c_{2k+1} = 0, k \in \mathbf{Z}$;

b) pour $\lambda = e^{2\pi i m/k}$, $m \in \mathbf{Z}$, $c_n = 0$ si $n \not\equiv m (\operatorname{mod} k)$.

651. $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Z} \xrightarrow{p} C_n \to 0$, où i est la multiplication par n, p le passage aux résidus modulo n.

652. De telle sorte que $f\left(t+\frac{1}{2}\right) = f(-t) = -f(t)$ (voir exercice 645a) et 650 a)). Pour cela il faut poser

$$f(t) = \begin{cases} f(1/2-t) & \text{sur} \quad [1/4, 1/2], \\ -f(t-1/2) & \text{sur} \quad [1/2, 3/4], \\ -f(1-t) & \text{sur} \quad [3/4, 1]. \end{cases}$$

653. $c_n(h) = c_n \cdot \dfrac{\sin 2\pi hn}{2\pi hn}$ pour $n \neq 0$; $c_0(h) = c_0$.

654. Se servir des relations : $\dfrac{\partial f}{\partial t_1} = 2\delta(t_1-t_2) - 2\delta(t_1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t_2} = -2\delta(t_1-t_2) + 2\delta(t_2)$.

Réponse : $c_{n_1 n_2} = 0$ pour $n_1 n_2 (n_1+n_2) \neq 0$ et pour $n_1 = n_2 = 0$; $c_{n0} = i/\pi n$; $c_{0n} = c_{n,-n} = -i/\pi n$.

655. a) $\{c_n\}$ est une suite à support borné.

b) $c_n = P\left(\dfrac{1}{n}\right)$ pour $n \neq 0$, où P est un polynôme.

c) $c_n = (-1)^n P\left(\dfrac{1}{n}\right)$ pour $n \neq 0$, où P est un polynôme.

656. Pour démontrer la condition nécessaire déduire de la définition positive de $f \in C(\mathbf{T})$ que

$$\int_T \int_T f(s-t)\, \varphi(s)\, \overline{\varphi(t)}\, ds\, dt \geqslant 0 \text{ pour toute fonction } \varphi \in C(\mathbf{T}).$$

Appliquer cette inégalité à $\varphi(t) = e^{2\pi i n t}$. Pour prouver la condition suffisante se servir du fait que f est la limite dans $C(\mathbf{T})$ des *moyennes de Césaro* $C_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$, où $S_k = \sum_{j=-k}^{k} c_j e^{2\pi i j t}$.

657. Voir indication de l'exercice 641.

658. Considérer une fonctionnelle linéaire F sur l'espace des polynômes trigonométriques prenant la valeur c_n sur $e^{2\pi i n t}$. Montrer que cette fonctionnelle est positive sur les polynômes de la forme $P(t) = |Q(t)|^2$, où Q est aussi un polynôme et que tout poly-

nôme trigonométrique positif se représente sous cette forme. (Se rappeler du principe de symétrie qui dit que les racines d'un polynôme $P(z)$ prenant des valeurs réelles sur le cercle $|z| = 1$ sont symétriques par rapport à ce cercle : si λ est racine $\bar{\lambda}^{-1}$ le sera également.) En déduire que F se prolonge continûment à l'espace $C(\mathbf{T})$ et par suite est une mesure μ.

659. $\sum\limits_{n,m} c_{n-m} z^n \bar{z}^{-m} = \left\| \sum\limits_n z_n U^n \xi \right\|^2$.

660. L'isomorphisme cherché V envoie le vecteur $U^n\xi \in H$ dans la fonction $e^{2\pi i n t}$ dans $L_2(\mathbf{T}, \mu)$.

661. Si f est une fonction indéfiniment différentiable, alors $S_n \Rightarrow f$ et l'ensemble limite est confondu avec le graphe de f. Toute fonction f différentiable par morceaux se représente par la somme d'une fonction indéfiniment différentiable et d'une combinaison linéaire de fonctions modèles de la forme $f(t) = \{t-\alpha\}$, $\alpha \in [0, 1[$. L'étude d'une fonction de base se ramène à celle de la somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin 2\pi k t}{\pi k}$, qui converge vers $\dfrac{1}{2} - \{t\}$ pour $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. On a

$$S_n(\varepsilon_n) = 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\varepsilon_n} \cos 2\pi k t\, dt = \int_0^{\varepsilon_n} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt - \varepsilon_n =$$

$$= \int_0^{\varepsilon_n} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t}\, dt + O(\varepsilon_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi\varepsilon_n} \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau + O(\varepsilon_n).$$

Donc, l'ensemble limite contient, outre le graphe de la fonction $f(t) = \dfrac{1}{2} - \{t\}$, le segment vertical $t = 0$ de longueur $2A$, où

$$A = \sup_a \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau \approx 0{,}588.$$

(Voir fig. 5).

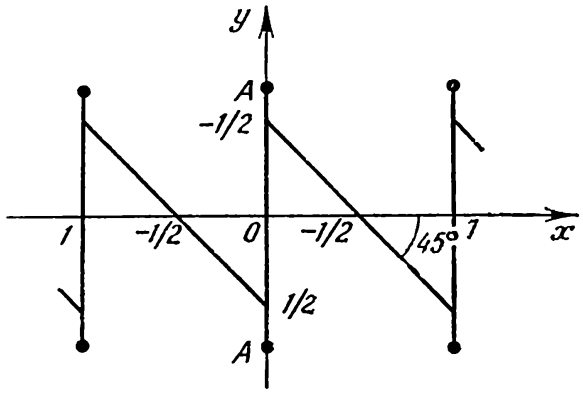


Fig. 5

Réponse : l'ensemble limite contient le graphe de la fonction f et les segments verticaux aux points t_k de discontinuité de f. La longueur d'un segment est de $2A = 1{,}177$ fois plus grande que la valeur du saut de f en t_k et le milieu de ce segment est confondu avec le point $\left(t_k, \dfrac{f(t_k-0)+f(t_k+0)}{2}\right)$. Ce fait s'appelle *phénomène de Gibbs*.

662. a) $c_n = 1$;
b) $c_n \equiv i \operatorname{sgn} n$ (voir indication de l'exercice 649).
663. a) $\delta(t)$;
b) $\dfrac{1}{1+\cos 2\pi t}$ $\left(\text{traitée comme la dérivée distributionnelle de } -\dfrac{1}{2\pi}\operatorname{cotg}\pi t\right)$;
c) $\dfrac{\pi}{2}\{-t\}$.

664. Se servir du fait que les polynômes trigonométriques forment un ensemble dense dans $\mathcal{E}(T)$.

665. $c_n \geqslant 0$ pour tous les $n \in \mathbf{Z}$.

666. Soient $\{c_k\}$ les coefficients de Fourier de la fonction caractéristique d'un ensemble $X \subset \mathbf{T}$: $c_k = \int\limits_X e^{-2\pi ikt}\,dt$. Si $X = X+\alpha$, alors $c_k = \int\limits_{X+\alpha} e^{-2\pi ikt}\,dt = \int\limits_X e^{-2\pi ik(t+\alpha)}\,dt = e^{-2\pi ik\alpha}c_k$. Si α est irrationnel, l'égalité $e^{-2\pi ik\alpha} = 1$ n'est possible que pour $k = 0$. Donc, la fonction caractéristique de X est presque partout constante.

667. Désignons par $\alpha(t, x)$ la solution distributionnelle vérifiant les conditions initiales $\alpha(0, x) = \delta(x)$. Montrer que la solution cherchée qui vérifie les conditions initiales $u(0, x) = v(x)$ est de la forme $u(t, x) = \int\limits_{\mathbf{T}} v(x-y)\,\alpha(t, y)\,dy$.

Pour calculer $\alpha(t, x)$ mettons-la sous la forme d'une série de Fourier en x : $\alpha(t, x) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} c_k(t)e^{2\pi ikx}$. L'équation devient alors $c_k'(t) = -k^2c_k(t)$ avec les conditions initiales $c_k(0) = 1$. Donc, $c_k(t) = e^{-k^2t}$. La fonction $\alpha(t, x) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} e^{-k^2t+2\pi ikx}$ pour t fixe ne s'exprime pas par des fonctions élémentaires de x. Elle est reliée très simplement avec la fonction téta de Weierstrass $\vartheta(z, q) = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2}(-1)^n e^{2\pi inz}$: soit $\alpha\ (t, x) = \vartheta\left(x+\dfrac{1}{2}, e^{-t}\right)$.

3. Intégrale de Fourier.

668. a) $\tilde{f}(\lambda) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\pi^2\lambda^2}{a}}$;
b) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{\pi}{|a|}\cdot e^{-\pi|a\lambda|}$;
c) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{1}{a+2\pi i\lambda}$;
d) $\tilde{f}(\lambda) = e^{-\pi i\lambda(a+b)}\,\dfrac{\sin\pi(b-a)\lambda}{\pi\lambda}$;
e) considérer l'intégrale de la fonction $f(z) = \dfrac{e^{-2\pi i\lambda z}}{\operatorname{ch} az}$ étendue à la frontière de la bande $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \dfrac{\pi}{a}$.

Réponse : $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{\pi}{|a|\operatorname{ch}\dfrac{\pi^2\lambda}{a}}$;

f) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{\pi^2}{2a^2}\,\dfrac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi^2\lambda}{a}}$;

g) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{2\pi^2}{a^2}\,\dfrac{\lambda}{\operatorname{Sh}\dfrac{\pi^2\lambda}{a}}$;

h) pour $0 \leqslant a \leqslant b$

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{cases} \pi^2 a & \text{pour} \quad |\lambda| \leqslant \dfrac{b-a}{2\pi}, \\ \dfrac{\pi a(a-s)}{2} & \text{pour} \quad |\lambda| = \dfrac{b+s}{2\pi}, \ |s| < a, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda| \geqslant \dfrac{b+a}{2\pi}. \end{cases}$$

669. a) Le changement de la fonction inconnue $f(x) \mapsto \varphi(x)\, e^{-\pi \|x\|^2}$ transforme les équations données en le système $\dfrac{d\varphi}{dx_k} = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$ d'où $\varphi(x) = \text{const}$.

b) Prouver l'identité $e^{-\pi \|x-a\|^2} = e^{\frac{-\pi \|a\|^2}{2}} \sum\limits_{m \in \mathbf{N}^n} \left(\dfrac{ia}{2}\right)^m \dfrac{f_m}{m!}$, où $a \in \mathbf{R}^n$, $a^m = a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}$, $m! = m_1! \ldots m_n!$ (Utiliser les relations $f_m = e^{\pi \|x\|^2} \partial^m e^{-2\pi \|x\|^2}$.) Vérifier que la série du second membre converge pour la topologie de $S(\mathbf{R}^{2n})$. Donc, le plus petit sous-espace fermé $L \subset S(\mathbf{R}^n)$ contenant toutes les fonctions f_m, $m \in \mathbf{N}^n$, contient également toutes les fonctions de la forme $\varphi_a(x) = e^{-\pi \|x-a\|^2} = f_0(x-a)$. En déduire que la fonction $\varphi_0 * \varphi$ appartient à L quelle que soit $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Il s'ensuit que la transformée de Fourier de l'espace L contient toutes les fonctions de la forme φf_0, où $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Il contient en particulier l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dense dans $S(\mathbf{R}^n)$.

c) $N_k f_m = m_k f_m$. (Utiliser les relations : $A_k^* f_m = f_{m+\varepsilon_k}$, $A_k f_m = c_{k,m} f_{m-\varepsilon_k}$, où ε_k sont des vecteurs de base dans N^n. Pour calculer les constantes $c_{k,m}$, se servir de la relation $A_k A_k^* - A_k^* A_k = 4\pi$.)

d) A toute fonction $f \in S(\mathbf{R}^n)$ est associée une suite $c_m = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, \overline{f_m(x)}\, dx = (f, f_m)_{L_2(\mathbf{R}^n)}$. Majorer les valeurs des semi-normes définissant la topologie de $S(\mathbf{R}^n)$ sur les vecteurs f_m à l'aide de la relation $\dfrac{\partial}{\partial x_k} = \dfrac{A_k + A_k^*}{2i}$, $x_k = \dfrac{A_k - A_k^*}{4\pi i}$.

e) $\tilde{f}_m = i^{|m|} f_m$. (Se servir de la relation $FA_k^* F^{-1} = F(iD_k) + M_k)F^{-1} = iA_k^* = iM_k - D_k$.)

670. Montrer que si $f \in S(\mathbf{R}^n)$ et $f(a) = 0$, $a \in \mathbf{R}^n$, il existe alors des fonctions $\varphi_k \in S(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, telles que $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - a_k)\, \varphi_k(x)$. $\left(\text{Par exemple, } \varphi_k(x) = \int\limits_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a + \tau(x-a))\, d\tau\right)$.

671. Voir exercice 670 et la démonstration du théorème pour $n = 1$ dans la partie « Théorie ».

672. *Première méthode* : généraliser les raisonnements cités dans la partie correspondante de la « Théorie ». *Deuxième méthode* : se servir du résultat de l'exercice 669d) et de e).

673. L'opérateur cherché envoie $g(x, y)$ dans $g(-y, x)e^{2\pi i x y}$. (Se servir de la formule de sommation de Poisson.)

674. a) $\tilde{f}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{2\pi i \lambda \alpha}}{2\pi i} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \alpha) & \text{pour} \quad \operatorname{sgn} \lambda = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \alpha), \\ 0 & \text{pour} \quad \operatorname{sgn} \lambda = -\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \alpha), \end{cases}$

b) $\tilde{f}(\lambda) = \begin{cases} \pi|a| & \text{pour} \quad |\lambda| < a/2\pi, \\ 0 & \text{pour} \quad |\lambda| > a/2\pi, \end{cases}$

c) $\tilde{f}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2i} & \text{pour} \quad \dfrac{b-a}{2\pi} < \lambda < \dfrac{a+b}{2\pi}, \\ -\dfrac{\pi}{2i} & \text{pour} \quad -\dfrac{a+b}{2\pi} < \lambda < \dfrac{a-b}{2\pi}, \end{cases}$

pour $0 \leqslant a \leqslant b$.

d) $\tilde{f}(\lambda) = \pi i e^{-2\pi|\lambda a|} \operatorname{sgn} \lambda$,

e) $\tilde{f}(\lambda) = 2\ln \operatorname{cotg} \pi^2/2a$ (voir l'exercice 668g)).

675. a) $\tilde{f}$ est paire, b) $\tilde{f}$ est impaire,

c) $\tilde{f}(-\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$, d) $\tilde{f}$ est réelle.

676. $\tilde{f}(\lambda) = |\det A|^{-1} \tilde{f}(A'^{-1}\lambda) e^{2\pi i \lambda b A^{-1}}$.

677. Se servir de la relation $f = \lim\limits_{n \to \infty} f * \varphi_n$, où $\{\varphi_n\}$ est une δ-suite dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ (la limite est une limite en norme sur l'espace $L_1(\mathbf{R}^n, dx)$). Vérifier que dans les conditions de l'exercice, la fonction $\tilde{f}(\lambda)$ est sommable (utiliser l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski et le fait que $(1+\|\lambda\|^2)^{s/2} \in L_2(\mathbf{R}^n, d\lambda)$ pour $s > n/2$).

678. Montrer que pour $s > n/2$ l'espace $L_2(\mathbf{R}^n, (1+\|\lambda\|^2)^s\, d\lambda)$ est contenu dans $L_1(\mathbf{R}^n, d\lambda)$. (Utiliser l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski pour les fonctions $f(\lambda)$ $(1+\|\lambda\|^2)^{1/2}$ et $(1+\|\lambda\|^2)^{-s/2}$ et le fait que $(1+\|\lambda\|^2)^{-s/2} \in L_2(\mathbf{R}^n, d\lambda)$ pour $s > n/2$.)

679. Passer à la transformée de Fourier.

680. Passer à la transformée de Fourier.

681. Utiliser les résultats des exercices 678 et 679 ainsi que la règle de différentiation d'une convolée.

682. Se servir du développement de $1/P(x)$ en fractions irréductibles de la forme $\dfrac{1}{(x-a)^2-b^2}$. c) $2m-2$.

683. Représenter f par une somme de fractions irréductibles.

684. a) Non.

b) Oui (passer à la transformée de Fourier).

685. Considérer la fonctionnelle F sur $S(\mathbf{R})$ définie par

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(\lambda)\, \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\lambda.$$

Montrer que F n'est pas négative sur des φ négatives. (Utiliser le fait que si $\varphi \in S(\mathbf{R})$ et $\varphi \geqslant 0$, alors $\varphi = \psi^2$, où $\psi \in S(\mathbf{R})$. En déduire que $\langle F, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \varphi\, d\mu$, où μ est une mesure sur $\mathbf{R}$.

686. Voir indication de l'exercice 641.

687. Voir indication de l'exdrcice 641.

688. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [-b, b]$ et $g = F(f)$. Alors $(2\pi i\lambda)^k g(\lambda) = F(f^{(k)})$, d'où

$$g(\lambda)\,|\lambda|^k = \left| (2\pi)^{-k} \int_{-b}^{b} e^{-2\pi i \lambda x} f^{(k)}(x)\, dx \right| \leqslant (2\pi)^{-k} \sup_x f^{(k)}(x) e^{2\pi b \operatorname{Im}\lambda}.$$

Donc, g possède les propriétés requises avec les constantes $a = 2\pi b$ et $c_k = (2\pi)^{-k} \sup\limits_x |f^{(k)}(x)|$. Inversement, si g vérifie les majorations $|g(\lambda)| \cdot |\lambda|^k \leqslant c^k e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}$, alors $g \in L_1(\mathbf{R}, d\lambda)$ et on peut définir la fonction continue $f = \check{F}g$. A partir des mêmes

majorations on déduit que f est indéfiniment différentiable. Enfin, si $|x| > a/2\pi$, alors

$$|f(x)| = \left| \int_{\mathbf{R}+it\,\mathrm{sgn}\,x} e^{2\pi i\lambda x} g(\lambda)\,d\lambda \right| = \left| \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\mu x - 2\pi t|x|} g(\mu + it\,\mathrm{sgn}\,x)\,d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi t|x|+ta} \cdot \frac{c_0+c_2}{1+\mu^2}\,d\mu = \pi(c_0+c_2)e^{-t(2\pi x-a)}.$$

Cette quantité tend vers 0 pour $t \to \infty$. Donc supp $f \subset \left[\frac{-a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}\right]$.

689. a) Soient $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$; posons $\varphi(a, b) = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(ax-b) f(x)\,dx$. Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(a+b)e^{-2\pi ib}\,db = \tilde{f}(a), \quad \varphi(a+b) = |a|^{-1} \int_L f(x)\,d\mu_L(x),$$

où L est l'hyperplan $ax = b$, $|a| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$. Si la dernière intégrale est nulle pour tous les L, alors $\varphi(a, b) = 0$ pour $a \neq 0$, et, par suite, $\tilde{f} \equiv 0$.

b) Calculons $f(0)$. D'après la formule d'inversion

$$f(0) = \int_{\mathbf{R}^3} \tilde{f}(a)\,da = \int_{\mathbf{R}^3} \left(\int_{\mathbf{R}} \varphi(a, b)e^{-2\pi ib}\,db \right) da.$$

En utilisant la relation $\varphi(\tau, a, \tau b) = |\tau|^{-1}\varphi(a, b)$ qui découle de la définition de $\varphi(a, b)$ et de l'identité $\delta(\tau x) = |\tau|^{-1}\,\delta(x)$, on obtient

$$f(0) = \int_{S^2} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}} \varphi(r\alpha, b)e^{-2\pi ib}\,db \right) r^2\,dr \right) d\sigma(\alpha) =$$

$$= \int_{S^2} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}} \varphi(\alpha, \beta)e^{-\pi i\beta r} \right) r^2\,dr \right) d\sigma(\alpha),$$

où $r = |a|$, $\alpha = \frac{a}{|a|} \in S^2$, $d\sigma(\alpha)$ est l'élément de surface de la sphère, $\beta = r^{-1}b$. Si l'on désigne $(4\pi)^{-1} \int_{S^2} \varphi(\alpha, \beta)\,d\sigma(\alpha)$ par $\psi(\beta)$ la dernière expression sera égale à $4\pi \int_0^\infty \tilde{\psi}(r)r^2\,dr = \frac{1}{\pi}\psi''(0)$. Géométriquement, la quantité $\psi(\beta)$ est la valeur moyenne des intégrales de f étendues à des plans se trouvant à une distance β de l'origine des coordonnées. Donc, pour déterminer la fonction f en un point x il faut connaître ses intégrales qui sont étendues aux plans coupant un voisinage aussi petit que l'on veut de x. Il se trouve que cette propriété est valable dans tous les espaces de dimension impaire.

690. Supposons que la droite donnée l est l'axe des x de $\mathbf{R}^3$. L'équation paramétrique d'une droite coupant en $(t, 0, 0)$ est : $x = t+\alpha s$, $y = \beta s$, $z = \gamma s$. Posons $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, t) = \int_{\mathbf{R}} f(t+\alpha s, \beta s, \gamma s)\,ds$. La fonction φ est homogène de degré -1 en les trois premières variables :

$$\varphi(\alpha\tau, \beta\tau, \gamma\tau, t) = |\tau|^{-1}\varphi(\alpha, \beta, \gamma, t).$$

On traitera φ comme une distribution régulière. Soit $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu, \nu, \tau)$ sa transformée de Fourier. On vérifie (voir exercice 699) que φ est régulière en dehors de la droite $\lambda = \mu = \nu = 0$ dans $\mathbf{R}^4$ et qu'elle est homogène de degré -2 en les trois premières variables. On a l'identité suivante

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu, \tau) = \tilde{f}(\tau, \mu\tau\lambda^{-1}, \nu\tau\lambda^{-1})\,|\tau\lambda^{-2}|.$$

(Pour la vérifier appliquer ses deux membres à la fonction de base $\tilde{\psi} \in S(\mathbf{R}^4)$ et se servir de la définition de φ et de l'identité $\langle \tilde{\varphi}, \psi \rangle = \langle \varphi, \psi. \rangle$) Donc $\tilde{f}$ peut être exprimée en fonction de $\tilde{\varphi}$: $f(a, b, c) = \tilde{\varphi}(a, b, c, a)\,|a|$. D'où

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi^2} \iint \varphi(x-s, y, z, t)\, \frac{ds\, dt}{(s-t)^2},$$

où l'intégrale doit être comprise comme la valeur de la distribution $|a|$ sur la fonction de base $\psi(a) = \iint \varphi(x-s, y, z, t) e^{2\pi i a(s-t)}\, ds\, dt$ (comparer avec l'exercice 691f).

4. Transformation de Fourier des distributions.

691. a) $\tilde{f}(\lambda) = \delta(\lambda)$; b) $\tilde{f}(\lambda) = (2\pi i\lambda)^k$;

c) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{e^{-2\pi i\lambda a}}{2\pi i(\lambda - i0)}$; d) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{1}{\pi i\lambda}$;

e) $\tilde{f}(\lambda) = \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^k \delta^k(\lambda)$; f) $\tilde{f}(\lambda) = 2\dfrac{(2k+1)!}{(2\pi i\lambda)^{2k+2}}$;

g) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{(2k)!}{(2\pi i\lambda)^{2k+1}}$.

692. Se servir du fait que $\cos ax^2 = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \cos ax^2 \cdot e^{-\varepsilon x^2}$. Réponse : $\tilde{f}(\lambda) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2|a|}} \left(\cos \dfrac{\pi^2\lambda^2}{a} - \sin \dfrac{\pi^2\lambda^2}{|a|}\right)$.

693. a) $\tilde{f}(\lambda) = -\pi i \operatorname{sgn} \lambda$; (comparer avec l'exercice 691d)) ;

b) $\tilde{f}(\lambda) = -2\pi i\theta(\lambda)$.

694. $f(x) = P\dfrac{d}{dx}\delta(x)$, où P est un polynôme de degré $< n$.

695. a) $f(x) = P\dfrac{d}{dx}\delta(x)$, où P est un polynôme de degré $n-k$;

b) $f(x) = P\left(\dfrac{d}{dx}\right)\delta(x) + Q(x)\,\theta(x) + R(x)$, où P est un polynôme de degré $< n-k$, Q et R, de degré $< k$.

696. $\tilde{f}_{\pm}(\lambda) = \mp\dfrac{\pi i}{r} e^{\mp 2\pi i |\lambda| r}$.

697. Utiliser le fait que $f'''(x) = 4[\delta(x-a) - \delta(x+a)] + 4\,|a|\,[\delta'(x-a) + \delta'(x+a)]$. Réponse : $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{2\pi a\lambda \cos 2\pi a\lambda - \sin 2\pi a\lambda}{\pi^3\lambda^3 \operatorname{sgn} a}$.

698. a) $\tilde{f}(\lambda) = \sum\limits_{l \in \mathbf{Z}} \dfrac{\operatorname{sgn} a}{\pi i(2l+1)}\, \delta\left(\lambda - \dfrac{2l+1}{2\pi} a\right)$;

b) $\tilde{f}(\lambda) = \sum\limits_{l \in \mathbf{Z}} \dfrac{1}{\pi(2l+1)}\, \delta\left(\lambda - \dfrac{(2l+1)\,|a|}{2\pi}\right)$;

c) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{l \in \mathbf{Z}} \dfrac{\delta(\lambda - la/\pi)}{4l^2 - 1}$.

699. Utiliser l'exercice 676. Réponse : $(-1-\lambda, \varepsilon)$.

700. Réponse :

$$(2\pi i\lambda + 0)^{-\alpha-1} = |2\pi\lambda|^{-\alpha-1} \left[\theta(\lambda) e^{\frac{i\pi}{2}(\alpha+1)} + \theta(-\lambda) e^{-i\frac{\pi}{2}(\alpha+1)}\right].$$

701. Réponse : $F(\lambda) = \sum\limits_{l \in \mathbf{Z}} \tilde{f}(l)\, \delta(\lambda - l)$.

702. a) Utiliser l'identité

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+R} f(t)\,dt = f(x+R)-f(x).$$

b) La fonction $e^{i\lambda x}$ sera quasipériodique de période R si $\lambda \in \mathbf{R}^n$ est tel que $\int_{\|x\| \leqq R} e^{i\lambda x}\,dx = 0$. Cette condition revient à dire que le nombre $R\,\|\lambda\|$ est solution de l'équation $I_{n/2}(x) = 0$, où $I_{n/2}$ est une fonction de Bessel (voir exercice 710). On sait que cette équation possède un nombre dénombrable de racines sur $[0, \infty[$, justiciables de la formule asymptotique $x_{mn} \approx \left(m+\frac{n-1}{4}\right)\pi$ pour $m \to \infty$. Si n est impair la fonction $I_{n/2}$ s'exprime par des fonctions élémentaires. En particulier, pour $n = 3$ on a $I_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$, de sorte que l'équation pour λ devient alors

$$R\cdot\|\lambda\| = \operatorname{tg}(R\cdot\|\lambda\|).$$

c) Oui ; voir indication de b).

703. Réponse : $\tilde{f}(\lambda) = (\det A)^{-1/2}\, e^{-\pi((A')^{-1}\lambda,\,\lambda)}$, où l'argument $\det A$ tel que $\tilde{b}(\lambda)$ soit continue est choisi sur le chemin reliant linéairement A à la matrice unité.

704. Réponse : $\tilde{f}\lambda = (\det A)^{-1/2}\, e^{i\pi s/4} e^{-i\pi(A^{-1}\lambda,\,\lambda)}$, où s est la signature de la matrice (c'est-à-dire la différence entre les valeurs propres positives et négatives).

705. La constante R est reliée aux dimensions du support, la constante N, à l'ordre de l'image. (Comparer avec le théorème de Paly-Wiener dans l'exercice 688.)

706. Transcrire l'équation en termes de transformées de Fourier.

707. Réponse : $f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, e^{-\pi x^2/(4t)}$.

708. Vérifier ces relations dans l'espace $S(\mathbf{R}^n)$.

709. Réponses : a) $\frac{\pi}{a}\operatorname{cth}\pi a$; b) $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$; c) $\frac{\pi^3}{32}$.

710. a) $\tilde{f}(\lambda) = \frac{2\pi}{(\lambda R)^{n/2-1}}\, I_{n/2-1}(2\pi\lambda R)$;

b) $\tilde{f}(\lambda) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\lambda R}\, I_{n/2}(2\pi\lambda R)$, où $I_n(x)$ est la *fonction de Bessel* définie par les représentations intégrales

$$I_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\, 2n\theta \cos(\sin\theta)\,d\theta = \frac{x^n}{(2n-1)!!}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\cos^{2n}\theta\,d\theta,$$

ou le développement en série : $I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$.

711. $k(r) = (2\sin 2\pi r)/r$.

712. Se servir de l'identité de Sokhotski (voir exercice 499).

713. $F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x^3}\right] = F\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\right] = \frac{i\lambda}{2}\mathcal{P}\left[P\frac{1}{x^2}\right] = -\frac{i\pi\lambda\,|\lambda|}{2}$.

CHAPITRE 5

THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS

§ 1. Calcul fonctionnel

1. Fonctions opératorielles dans un espace de dimension finie.

714. Utiliser l'*identité de Cayley* : $P_A(A) = 0$, où P_A est le polynôme caractéristique de la matrice A.

715. $b \Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a) est évidente. Pour déduire b) de a), considérons pour chaque vecteur ξ l'idéal I_ξ dans l'anneau des polynômes d'une variable, défini par $I_\xi = \{P : P(A)\xi = 0\}$.

Comme tout idéal dans un anneau de polynômes d'une seule variable, l'idéal I_ξ est principal, c'est-à-dire qu'il est engendré par un seul polynôme P_ξ. Vu que $P_A \subset I_\xi$, P_ξ est diviseur de P_A. Soient $P_1, \ldots, P_k$ tous les diviseurs distincts de P_A de degré $< n$ et de coefficient supérieur 1. Supposons que $L_i = \ker P_i(A)$. De a) il s'ensuit que $L_i \neq L$. Mais alors $\bigcup_{i=1}^{k} L_i \neq L$. Il existe donc un vecteur $\xi \in L$ qui n'est annulé par aucun opérateur $P_i(A)$, donc par aucun opérateur $P(A)$, $\deg P < n$. Ceci entraîne b).

716. Utiliser la formule du déterminant de Vandermonde.

717. Suivre le schéma a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

718. La condition exprimant la non-régularité de A peut être écrite par un système d'équations algébriques en les coefficients matriciels de A (exprimant l'indépendance linéaire de $1, A, \ldots, A^{n-1}$).

719. a) Soit ξ un vecteur cyclique pour A. Représenter A dans la base $\xi, A\xi, \ldots, A^n\xi$.

b) Le premier vecteur de base e_1 est cyclique pour A.

c) Les coefficients $\{a_i\}$ sont définis de façon unique par le polynôme caractéristique de la matrice A.

720. Les coefficients du polynôme $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ s'expriment en fonction des sommes $s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, des puissances de ses racines. (Plus exactement on a les *formules de Newton* : $ka_k = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i}$, où $a_0 = 1$.) Pour $P = P_A$ on a $s_k = \operatorname{tr} A^k$.

721. c) Réponse :

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-\lambda)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

722. Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2$, $e = e_1 \oplus e_2$ étant l'unité de $\mathfrak{A}$, alors les éléments $e_1 \oplus 0$ et $0 \oplus e_2$ sont non triviaux et idempotents. Inversement, si e est idempotent dans $\mathfrak{A}$ et différent de 0 et de 1, alors $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, où $\mathfrak{A}_1 = e\mathfrak{A}e$, $\mathfrak{A}_2 = (1-e)\,\mathfrak{A}(1-e)$.

723. a) L'équation $\lambda^2 - \lambda$ ne possède sur $\mathbf{C}$ que les solutions triviales 0 et 1.

b) Montrer que le générateur x est solution de l'équation $(x - \lambda \cdot 1)^n = 0$, où $\lambda \in \mathbf{C}$ et $n = \dim \mathfrak{A}$.

724. Raisonner par l'absurde et considérer l'algèbre de plus petite dimension indécomposable en somme de primaires.

725. Soit $A = \inf a_n/n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que $\dfrac{a_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} < A + \varepsilon$. Mettons un N arbitraire sous la forme $N = k \cdot n_\varepsilon + l$, où $0 \leqslant l < n_\varepsilon$. Alors $\dfrac{a_N}{N} \leqslant \dfrac{k a_{n_\varepsilon} + a_l}{k n_\varepsilon + l} \cdot$ $\cdot k$ tend vers ∞ avec N. D'où la proposition de l'exercice.

726. Utiliser l'exercice 714.

727. Utiliser l'exercice 723b).

728. Pour les opérateurs réguliers.

729. Utiliser les exercices 718 et 720.

730. Montrer que presque tout couple de matrices (A, B) se réduit à la forme $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$.

731. La codimension de l'orbite de l'action du groupe $PGL(n)$ est égale dans ce cas à $2n^2 - (n^2 - 1) = n^2 + 1$.

732. Toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \cdot 1_n & A \\ 0 & \lambda \cdot 1_n \end{pmatrix}$, où 1_n est la matrice unité d'ordre n, permutables deux à deux.

733. Représenter A sous la forme $\lambda \cdot 1 + N$, où $N^n = 0$ et vérifier cette égalité pour $f(\lambda) = \lambda^k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

734. Vérifier que $f(A)$ s'exprime linéairement en fonction des valeurs de f aux points $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et trouver les coefficients (matriciels) correspondants.

735. Vérifier que $f(A)$ s'exprime linéairement en fonction de $f^{(j)}(\lambda_k)$, $a \leqslant j \leqslant m_k - 1$. Réponse : $B_{jk} = P_{jk}(A)$, où $P_{jk}(x)$ est un polynôme de degré $n-1$ tel que :

1) $P_{jk}^{(s)}(\lambda_i) = 0$ pour tous les couples (s, i), $0 \leqslant s \leqslant m_i - 1$, hormis le couple (j, k) ;

2) $P_{jk}^{(s)}(\lambda_k) = 1$.

736. Les points extrêmes de K sont des opérateurs positifs de rang 1, c'est-à-dire des orthoprojecteurs sur les sous-espaces de dimension un de H.

2. Fonctions d'opérateur auto-adjoint borné.

737. L'ensemble $\sigma(A)$ est confondu avec l'ensemble des valeurs de la fonction $a(x)$.

738. Le spectre de A est l'ensemble des valeurs essentielles de la fonction $a(x)$, c'est-à-dire des valeurs $\lambda \in \mathbf{C}$ telles que pour tout voisinage U de λ l'ensemble

$$E_U = \{x \in X : \ a(x) \in U\}$$

soit de mesure positive.

739. Passer au transformé de Fourier. Réponse : l'ensemble des valeurs de la transformée de Fourier de la fonction f.

740. Passer à la transformée de Fourier. Réponse : l'ensemble des coefficients de Fourier de la fonction f.

741. Montrer que les spectres de U et de U^{-1} sont situés sur le cercle unité.

742. Vérifier l'isométrie de l'application $(A + \bar{\lambda}1)\xi \mapsto (A + \lambda 1)\xi$ et la densité de $\operatorname{im}(A + \bar{\lambda}1)$.

743. Soit $U = (A + i1)(A - i1)^{-1}$. Alors

$$(A^* + i1)^{-1}(A^* - i1) = U^* = U^{-1} = (A - i1)(A + i1)^{-1},$$

d'où

$$(A^* - i1)(A + i1) = (A^* + i1)(A - i1) \quad \text{et} \quad A = A^*.$$

744. Utiliser le fait que $U+1$ et $(U-1)^{-1}$ commutent.

745. Utiliser la formule

$$A^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$

et montrer que $\|A^n\| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$. Réponse : $\varrho(A) = 0$.

746. Se servir de la formule $R_\lambda(A) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-1-k} A^k$. Réponse : $R_\lambda(A)\, f(x) = -\lambda^{-1} f(x) - \lambda^{-2} \int_0^x e^{\lambda^{-1}(x-t)} f(t)\, dt$.

747. Se servir de l'exercice 556.

748. Montrer que tout polynôme positif sur l'intervalle $[a, b]$ se représente par des sommes de termes de la forme $Q_i^2(x)$, $(x-a)\, Q_i^2(x)$, $(b-x)\, Q_i^2(x)$, où Q_i sont des polynômes de coefficients réels. Indication :

$$(b-x)(x-a) = (b-x)\left(\frac{x-a}{\sqrt{b-a}}\right)^2 + (x-a)\left(\frac{b-x}{\sqrt{b-a}}\right)^2.$$

749. Se servir du résultat de l'exercice 748.

750. Utiliser la formule $e^{itA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itA)^k}{k!}$.

751. Voir indication de l'exercice 750.

752. Montrer que $U(t)$ est une fonction différentiable (voir méthode de lissage dans la démonstration du théorème de Stone). Déduire ensuite l'équation différentielle de l'exercice 751 et montrer qu'elle admet une solution unique vérifiant la condition initiale $U(0) = 1$.

753. $A = RU$, où R est l'opérateur de multiplication par la fonction $|a(x)|$, U l'opérateur de multiplication par la fonction $\operatorname{sgn}(a(x))$.

754. L'opérateur de translation unilatérale T est tel que $T^*T = 1$, $TT^* = P$, où P est un orthoprojecteur sur l'orthocomplément du premier vecteur de base. Réponse ; $T = PT$.

755. a) $A = BRB^{-1}BUB^{-1}$ est la décomposition polaire de A.

b) Non. Traiter le cas où A et B sont des opérateurs de translation unilatérale comme dans l'exercice 754.

756. Supposons que $B = 1$. Alors A est inversible et $A^{-1} \ll 1$ comme le montrent les relations $(A^{-1}x, x) = (A^{-1/2}x, A^{-1/2}x) \leqslant (x, x)$. Le cas général s'obtient par passage au spectre de $B^{-1/2}AB^{-1/2}$.

757. Réduire T à une multiplication par une fonction.

758. Se servir du fait que la suite $(P_1P_2P_1)^n$ est monotone.

759. Vérification immédiate.

3. Opérateurs auto-adjoints non bornés.

760. Prouver l'équivalence des relations :

1) $0 \oplus x \in \tau(\Gamma_A)^\perp$,

2) $x \perp S_A$.

761. Utiliser la permutabilité des opérateurs τ et $\perp$ ainsi que le résultat de l'exercice 551.

762. a) $A^* = -d/dx$, D_{A^*} est le domaine naturel de définition ;

b) $D_{A^*} = \{f \in L_2(\mathbf{R}, dx),\ f' \in L_2(\mathbf{R}, dx) \oplus \mathbf{C}\delta(x)\}$;

c) $A^* = -A$.

763. a) $A^* = -d/dx$ avec un domaine naturel de définition ;

b) $A^* = -d/dx$, D_{A^*} se déduit du domaine naturel de définition par imposition de la condition supplémentaire $f(0) = 0$.

764. Se servir des égalités $\overline{(A)}^* = A^*$ et $(A^*)^* = \bar{A}$ (exercice 761).

765. a) N'est pas symétrique ;
b) est essentiellement auto-adjoint ;
c) est symétrique mais pas essentiellement auto-adjoint.

766. a) $A^* = i\dfrac{d}{dx}$, D_{A^*} se déduit du domaine naturel de définition par imposition de la condition supplémentaire $f(1) = \bar{\lambda} f(0)$.
b) $|\lambda| = 1$.

767. Réponse : oui dans les trois cas.

768. Montrer que l'image de la boule unité par l'application A est faiblement bornée.

769. a) Vérifier l'égalité $\|(A-i1)x\| = \|(A+i1)x\|$.
b) Si $x \in \ker(U-1)$ et $x = (A-i1)y$, alors $x = (A+i1)y$, d'où $y = 0$.

770. Vérifier la relation $(\tau\Gamma_A)^\top = \Gamma_A$.

771. Passez à la transformée de Fourier. Réponse

$$A : \{x_n\} \to \left\{ i \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n-k} - x_{n+k}) \right\}.$$

772. a) Oui ; b) Oui. Vérifier que im $(A \pm i1)$ contient toutes les suites à support borné.

773. Oui. Par exemple l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ et l'espace des fonctions en escalier.

774. Pour prouver la condition suffisante, se servir de l'inégalité de l'exercice 556b) et montrer que $(1+A)^{-1}$ se prolonge de im $(A+1)$ à H tout entier et a une norme $\leqslant 1$.

775. Considérer les projections du vecteur $x \oplus 0 \in H \oplus H$ sur Γ_A et $\Gamma_A^\perp = \tau(\Gamma_{A^*})$. Montrer que $(1+A^*A)^{-1}$ est un opérateur auto-adjoint borné (voir exercice 798).

776. Se servir du critère d'hermicité essentielle ou du théorème de Stone.

777. Montrer que $(A-\lambda 1)^{-1}$ est borné pour les λ non réels (le changement $A \mapsto \alpha A + \beta 1$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, ramène le cas général au cas $\lambda = i$).

778. b) Cette relation est fausse. Il est possible que $\ker A = 0$, mais $D_{A^*} = \{0\}$. A cet effet il suffit de prendre pour Γ_A tout sous-espace dense dans $H \oplus H$ et ayant une intersection vide avec $H \oplus 0$ et avec $0 \oplus H$.

779. Si $A \subset A_1$, alors $A_1^* \subset A^*$, ces deux inclusions étant simultanément strictes ou non strictes.

780. Vérifier l'égalité $\|(A+i1)x\| = \|(A-i1)x\|$.

781. Montrer que les graphes des opérateurs A et U de l'exercice 780 se déduisent l'un de l'autre par des applications linéaires inverses l'une de l'autre de l'espace $H \oplus H$.

782. A chaque extension symétrique de l'opérateur A correspond une extension isométrique de l'opérateur U de l'exercice 780. A un opérateur auto-adjoint correspond une extension unitaire.

§ 2. Décomposition spectrale des opérateurs

1. Réduction d'un opérateur à la multiplication par une fonction.

783. Considérer un espace X formé d'un nombre fini de points.

784. a) et b).

785. a) Soit f un vecteur quelconque de H. Posons $g(x) = f(-x)\cdot \operatorname{sgn} x$. Montrer que le vecteur g est orthogonal au sous-espace cyclique engendré par f.
b) Les sous-espaces des fonctions paires et des fonctions impaires sont cycliques.

786. Supposons par absurde que $\sum_{k=0}^{N} c_k A^k = 0$ et $c_N \neq 0$. Alors l'enveloppe linéaire des opérateurs $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ serait confondue avec celle des opérateurs $\{A^k\}_{k=0}^{N-1}$. Donc, pour tout vecteur $\xi \in H$ l'espace engendré par les vecteurs $\{A^k\xi\}_{k=1}^{\infty}$ serait de dimension $\leqslant N$. Donc, l'opérateur A ne peut pas posséder de vecteur cyclique.

787. Utiliser le fait que carré et intervalle fermé borné sont isomorphes comme espaces mesurés.

788. Tout opérateur de $L_2([a, b], \mu)$ commutant avec la multiplication par x est un opérateur de multiplication par une fonction de x.

789. Utiliser le théorème de réduction d'un opérateur A à la multiplication par une fonction $a(x)$ dans l'espace $L_2(X, \mu)$. Montrer que l'ensemble des $x \in X$ tels que $a(x) \notin \sigma(A)$ est de mesure nulle. Donc, pour presque tous les $x \in X$ on a $|f(a(x))| \leqslant \sup\limits_{t \in \sigma(A)} f(t)$.

790. Seulement a). Dans b), la multiplicité est égale à 2 (voir exercice 785), dans c), elle est infinie (c'est-à-dire qu'il est impossible de décomposer H en une somme d'un nombre fini de sous-espaces cycliques).

791. Passer aux transformées de Fourier. La condition d'hermicité est : $S(f)$: $\tilde{f}(\lambda)$ est une fonction réelle (ou $f(x) = \overline{f(-x)}$).

792. Non, puisque $\tilde{f}(\lambda) \to 0$ pour $\lambda \to \infty$.

793. a) $f(g) = \overline{f(-g)}$;

b) $|\tilde{f}(x)| \equiv 1$ (ce qui n'est possible que si le groupe $\hat{G}$ est compact et G discret) ;

c) G doit être compact.

794. Utiliser l'exercice 573b).

795. Passer à la transformée de Fourier. Réponse : $\sigma(A) = [-4 ; 0]$.

796. Effectuer une transformation de Fourier.

797. Se servir de la relation $\tau(\Gamma_A)^{\perp} = \Gamma_{A^*}$ qui est valable pour tout opérateur A et est équivalente à la définition de A^*.

798. a) Par définition de la projection on a

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|Ay\|^2 + \|Az\|^2 + \|z\|^2,$$

d'où $\|B\| \leqslant 1$, $\|C\| \leqslant 1$.

b) L'égalité $x \oplus 0 = (y \oplus Ay) + (-Az \oplus z)$ entraîne $x = y - Az$, $z = -Ay$. En se rappelant que $y = Bx$, $z = Cx$, on obtient $x = Bx - ACx$, $Cx = -ABx$ ou $1 = B - AC$, $C = -AB$.

D'où $1 = B + A^2B$, c'est-à-dire que $(1 + A^2)B = 1$.

799. a) e^{iaA} : $f(x) \to f(x+a)$ (opérateur de translation),

b) $\dfrac{\sin aA}{a}$: $f(x) \to \dfrac{f(x+a) - f(x-a)}{2ia}$ (opérateur aux différences finies),

c) $\dfrac{1}{A^2 + a^2}$: $f(x) \to \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-a|x-y|} f(y)\, dy$, $a > 0$.

800. e^{aA^2} : $f(x) \to \dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a}} f(y)\, dy$.

801. $\Delta_h = \dfrac{e^{h\,d/dx} - 1}{h}$.

802. Montrer que A est un opérateur de convolution sur le groupe des nombres positifs muni de la multiplication. Effectuer le changement

$$x = e^t, \quad y = e^s, \quad f(x) = e^{-t/2}\varphi(t).$$

Réponse : l'opérateur de multiplication par $\left(\dfrac{1}{2 \operatorname{ch} t/2}\right)^{\sim} = \dfrac{\pi}{\operatorname{ch} 2\pi^2\lambda}$, $\sigma(A) = [0, \pi]$ (voir indication de l'exercice 668f).

803. La transformation de Fourier envoie A dans l'opérateur de multiplication par la fonction $a(\lambda, \mu) = I_0(2\pi\varrho R)$, où $\varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ et $I_0(z)$ est une fonction de Bessel (voir exercice 710).

804. L'image de A par la transformation de Fourier est un opérateur de multiplication par la fonction

$$a(\lambda, \mu, \nu) = \frac{\sin 2\pi\varrho R}{2\pi\varrho R},$$

où $\varrho = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$.

805. $f(F)$: $\varphi(x) \to \dfrac{f(1)+f(i)+f(-1)+f(-i)}{4}\varphi(x)+$

$$+\frac{f(1)-if(i)-f(-1)+if(-i)}{4}\tilde{\varphi}(x)+\frac{f(1)-f(i)+f(-1)-f(-i)}{4}\varphi(-x)+$$

$$+\frac{f(1)+if(i)-f(-1)-if(-i)}{4}\tilde{\varphi}(-x).$$

2. Théorème spectral.

806. a) Soit $w(t)$ le module de continuité de la fonction f (c'est-à-dire que $|f(x)-f(y)| \leqslant w(|x-y|)$). Prouver la majoration

$$\| S(f, T, \xi)-S(f, T, \eta)\| \leqslant w(\delta(T)).$$

b) Utiliser le fait que la somme intégrale $S(f, T, \xi)$ est confondue avec l'intégrale de Lebesgue de la fonction en escalier

$$f_{T\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\,\chi_{[t_k,\, t_{k+1}]}(x).$$

807. Pour prouver les propriétés a), c) et d), se servir de la relation

$$\left(\int_X f(x)\,d\lambda(x)\xi, \eta\right) = \int_X f(x)\,d\lambda_{\xi,\eta}$$

pour tous les ξ, $\eta \in H$. Vérifier l'égalité b) pour les fonctions caractéristiques d'abord et utiliser a) ensuite. Pour prouver e), se servir de b) et de l'exercice 563.

808. a) Se servir de la relation

$$X\backslash(E_1 \cup E_2) = (X\backslash E_1)\cap(X\backslash E_2).$$

b) Traitons d'abord le cas où $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Supposons que $\lambda(E_1) = \alpha$, $\lambda(E_2) = \beta$. Comme α, β et $\alpha+\beta$ sont des orthoprojecteurs on a $\alpha^2 = \alpha$, $\beta^2 = \beta$, $(\alpha+\beta)^2 = \alpha+\beta$. D'où $\alpha\tau+\beta\alpha = 0$. En multipliant cette égalité par α à gauche, à droite et des deux côtés, on obtient : $\alpha\beta+\alpha\beta\alpha = 0$, $\alpha\beta\alpha+\beta\alpha = 0$, $2\alpha\beta\alpha = 0$. E'où $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$. Pour prouver 2) dans le cas général, on se servira des relations

$$E_1 = (E_1\cap E_2)\sqcup(E_1\backslash E_2), \qquad E_2 = (E_1\cap E_2)\sqcup(E_2\backslash E_1).$$

D'où

$$\lambda(E_1)\,\lambda(E_2) = [\lambda(E_1\cap E_2)+\lambda(E_1\backslash E_2)]\,[\lambda(E_1\cap E_2)+\lambda(E_2\backslash E_1)].$$

La dernière expression est égale à $\lambda(E_1\cap E_2)$ en vertu de ce qui a été démontré.

809. Oui. Se servir d'une application de H_1 dans H_2 respectant la mesure (voir exercice 102a)).

810. Oui. Utiliser le fait que la correspondance $\xi \to \mu_\xi(E)$ définit sur H une seminorme vérifiant l'identité du parallélogramme.

811. Appliquer la proposition de l'exercice précédent à la mesure μ_ξ représentant la fonctionnelle $f \to (\varphi(f)\xi, \xi)$.

812. a) Résulte de la permutabilité de $\lambda(E)$ et de A, qui découle, elle, de la construction de λ.

b), c). Considérer la réalisation dans laquelle A est un opérateur de multiplication par une fonction (comparer avec l'exercice 738).

813. Résulte de 812 c) (et se démontre de façon analogue).

814. Si $(A-a\cdot 1)^{-1}$ existe, alors $\|A\xi-a\xi\| \geqslant \|(A-a\cdot 1)^{-1}\|^{-1}\,\|\xi\|$. Si a est un point du spectre, utiliser le résultat de l'exercice 813.

815. Utiliser le fait que tout système orthonormal converge faiblement vers 0.

816. Soit $I_\varepsilon(t) = \dfrac{\varepsilon}{\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}$.

S'assurer par un calcul direct moyennant le changement de variables $\lambda \to (\lambda - t)/\varepsilon$ que

$$I_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin [a, b], \\ 1/2 & \text{si} \quad t = a \quad \text{ou} \quad t = b, \\ 1 & \text{si} \quad t \in \,]a, b[. \end{cases}$$

817. *Première méthode :* mettre U sous la forme Re $U + i$ Im U. *Deuxième méthode :* utiliser les résultats des exercices 769 et 770.

818. Utiliser le résultat de l'exercice 817 et la relation

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi ikt} \to \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t = 0 \\ 0 & \text{pour} \quad t \neq 0 \end{cases}; \qquad t \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

pour $N \to \infty$.

819. a) Pour prouver la multiplicativité se servir de *l'identité de Hilbert* $R_\lambda(A) \cdot R_\mu(A) = \dfrac{R_\lambda(A) - R_\mu(A)}{\lambda - \mu}$ et supposer que le contour C parcouru par la variable λ contient le contour C' parcouru par la variable dans l'intégrale

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_C \int_C f_1(\lambda) f_2(\mu)\, R_\lambda(A)\, R_\mu(A)\, d\lambda\, d\mu.$$

b) Utiliser le fait que l'intégrale est la limite de sommes intégrales de Riemann et que les sommes intégrales numériques correspondantes convergent vers l'intégrale $\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_C \frac{f(\lambda)}{t-\lambda}\, d\lambda = f(t)$.

820. Voir indications des exercices 306 et 787.

821. Considérer d'abord le cas d'un sous-espace cyclique.

822. Réponse : $\lambda(E) = S(f_E)$, où f_E est la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de l'ensemble $\dfrac{1}{2\pi} \cdot E$ et $S(f)$, l'opérateur de convolution de f.

823. Réponse : $\lambda(E) = S(f_E)$, où f_E est la transformée de Fourier de la fonction

$$g_E(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -4\pi^2\lambda^2 \in E, \\ 0 & \text{si} \quad -4\pi^2\lambda^2 \notin E. \end{cases}$$

824. Réponse : $\lambda(E) = S(f_E)$, où f_E est la transformée de Fourier de la fonction

$$g_E(\lambda, \mu) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -4\pi^2(\lambda^2 + \mu^2) \in E, \\ 0 & \text{si} \quad -4\pi^2(\lambda^2 + \mu^2) \notin E. \end{cases}$$

825. Réponse : $A = -id/dx$.

826. Utiliser le théorème de Stone et la réalisation de $U(t)$ sous forme d'un opérateur de multiplication par $e^{2\pi it}$ dans la somme directe d'espaces de la forme $L_2(\mathbf{R}, \mu)$.

827. Oui. Utiliser l'exercice 817.

828. Vérifier que la fonction $f_0(x) = e^{-x^2/2}$ est fonction propre de l'opérateur A et que l'opérateur

$$B = -\frac{d}{dx} + x$$

envoie la fonction propre de A associée à la valeur propre λ dans la fonction propre associée à la valeur propre $\lambda + 2$. Réponse :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k,$$

où P_k est un projecteur sur le sous-espace engendré par la fonction $f_k = B^k f_0$.

BIBLIOGRAPHIE PRINCIPALE

1. Ahiezer N., Glazman I. Théorie des opérateurs linéaires dans l'espace hilbertien. Moscou, 1966 (en russe).
2. Berezine F., Gvichiani A., Gorine E., Kirillov A. Recueil d'exercices d'analyse fonctionelle. M.: MGU, 1977 (en russe).
3. Bourbaki N. Livre VI. Intégration. Mesures, intégration des mesures. Paris, Hermann et C°.
4. Bourbaki N. Théories spectrales, Paris, 1967.
5. Bourbaki N. Livre I. Théorie des ensembles. Paris, Hermann 1960.
6. Bourbaki N. Livre V. Espaces vectoriels topologiques. Paris, 1955.
7. Chilov G. Analyse mathématique. Deuxième cours spécial. M., « Naouka » 1965.
8. Dunford N., Schwartz J. Linear Operators. General Theory. N.Y., 1958.
9. Dunford N., Schwartz J. Linear Operators. Spectral Theory. N.Y., 1963.
10. Edwards R. Functional Analysis. Theory and Applications. N.Y., 1965.
11. Guelfand I., Chilov G. Les distributions. Editions Dunod. Tome 1. Les distributions, 1962. Tome 2. Espaces fondamentaux, 1964.
12. Guelfand I., Chilov G. Les distributions. Editions Dunod. Tome 3. Théorie des équations différentielles, 1965.
13. Guelfand I., Vilenkine N. Les distributions. Editions Dunod. Tome 4. Applications de l'analyse harmonique, 1967.
14. Halmos P. Measure Theory. N.Y., 1950.
15. Hewitt E., Ross K. Abstract Harmonic Analysis. Vol. 1. Heidelberg, 1970.
16. Hewitt E., Ross K. Structure and Analysis for Compact Groups. Analysis of Locally Compact Abelian Groups. Vol. 2. Heidelberg, 1970.
17. Kantorovitch L., Akilov G. Analyse fonctionnelle. Editions Mir, traduction française, 1981.
18. Kirillov A. Eléments de théorie des représentations. — M., Editions Mir, 1974 (traduction française).
19. Kolmogorov A., Fomine S. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Editions Mir, Moscou, 1974.
20. Koudriavtsev L. Analyse mathématique. T. 1, 2. — M., « Naouka » 1970. (en russe).
21. Maurin K. Metody Przestrzeni Hilberta, Varsovie, 1959.
22. Naymark M. Opérateurs différentiels linéaires, izd. 2. — M.: «Naouka », 1969. (en russe).
23. Pontriaguine L. Groupes continus, izd. 3. — M., « Naouka », 1977. (en russe).
24. Reede and Saimon. Methods of modern mathematical physics 1. Functional analysis Academic Press, New York, London, 1972.
25. Reed and Saimon. Methods of modern mathematical physics. 2. Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
26. Riesz F., Sz.-Nady B. Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest, 1953.

27. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. 2nd ed. N.Y., 1964.
28. Rudin W. Functional Analysis, N.Y., 1973.
29. Yosida K. Functional Analysis. Berlin, 1965.
30. Vladimirov V. Distributions en physique mathématique. M.: « Naouka », 1976, (en russe).
31. Vladimirov V., Mikhaïlov V., Vacharine A., Karimova K., Sidorov Y., Chabounine M. Recueil d'exercices sur les équations de physique mathématique. — M. : «Naouka », 1974. (en russe).

BIBLIOGRAPHIE AUXILIAIRE

1*. Alexandrov P. Introduction à la théorie générale des ensembles et des fonctions. M., Gostekhizdat, 1948 (en russe).
2*. Banach S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
3*. Bourbaki N. Topologie générale. Structures fondamentales.
4*. Bourbaki N. Livre 3. Topologie générale. Utilisation des nombres réels en topologie générale. Espaces fonctionnels. Fascicules de résultats.
5*. Chilov G., Fan Dik Tin. Intégrale, mesure et dérivée sur les espaces vectoriels. M.: « Naouka », 1967 (en russe)
6* Day M. Normed Linear Spaces, Berlin West, 1958.
7* Dieudonné J. Fondements de l'analyse moderne, tome I. Eléments d'analyse, tome II. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
8* Fraenkel A., Bar-Hillel Y. Foundations of Set Theory, Amsterdam, 1958.
9*. Halmos P. Finite-dimensional vector spaces 2d ed. Princeton (N.J.) Van Nostrand, cop. 1958.
10*. Kelley, John L. General topology New York Van Nostrand 1955.
11*. Lebesgue A. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. 2 édition, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
12*. Loomis L. An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Toronto, 1953.
13*. Maslov V. Méthodes opératorielles. M.: « Naouka », 1973. (en russe).
14*. Mikhline S. Leçons sur les équations intégrales. — M.: Fizmatgiz, 1959 (en russe).
15*. Pietsch A. Nukleare lokalkonvexe Räume, Berlin, 1965.
16*. Plesner A. Théorie spectrale des opérateurs linéaires. M., « Naouka », 1965 (en russe).
17*. Robertson A., Robertson W. Topological Vector Spaces. Cambridge, 1964.
18*. Wiener N. The Fourier integral and certain of its applications. New York 1959.
19*. Wiener N. Non-Linear Problems in Random Theory, New York, 1958.
20*. Wiener N., Paley R. Fourier transforms in the complex domain 5th. print. Providence 1964.

INDEX ALPHABÉTIQUE

Algèbre d'ensembles 16
– enveloppante 145
– de groupe 98
– de Lie libre 144
– primaire 220
– tensorielle 144
Alternative de Fredholm 69
Angle de sous-espaces 201
– de vecteurs 89
Anneau de parties 16
Annihilateur 183, 214
Application ergodique 213
Atome 277
Axiome de choix (Zermelo) 9

Base continue 203
– de Hamel 263
– topologique dénombrable 188
Boréliens 17, 149
Borne supérieure essentielle 29
Boule unité 42

Caractère généralisé 210
– d'un groupe 106
Catégorie 11
– duale 14
Charge(s) 21
– absolument continue 40
– complexe 21
– équivalentes 40
Classes d'éléments conjugués 205
– d'équivalence 7
Codimension 49
Coefficients de Fourier 109
Complétion 10
Conoyau 63
Continuité absolue d'une intégrale 37
Convergence en mesure 27
– presque partout 27
– uniforme 27
Convolution 98
Corps convexe 172
– des nombres p-adiques 142
Couples conjugués 201
C-propriétés de Lusine 155
Créateurs 183, 214
Critère de Hausdorff 57
– de Weyl 228

Décomposition polaire 202
– spectrale 135
Diagramme commutatif 12
Différentiation fractionnaire 209
Dimension approximative 58
Distribution 81
– à croissance modérée 81
– définie positive 213
– régulière 82
– de support compact 81
Domaine naturel de définition 127, 223
Droite d'Alexandrov 141

Ecart entre espaces 201
Egalité de Parseval 91
Elément(s) idempotent 220
– maximum 9
– orthogonaux 89
Ensemble(s) absorbant 42
– borné 75
– – inférieurement 8

Ensemble(s) borné supérieurement 8
– compact 57
– convexe 42
– cylindrique 24
– d'Egorov 156
– des entiers p-adiques 143
– équilibré 42
– équivalents 139
– filtrant 8
– de Lebesgue 26
– mesurable 19
– mesurable-Lebesgue 18
– précompact 57
– résolvant 120
– de σ-univocité 152
– triadique de Cantor 179
– quotient 7
Enveloppe associative 145
– convexe 170
Equation de la chaleur 218
– intégrale de Fredholm 183
Espace antidual 93
– de Banach 46, 50
– de cohomologie 63
– complémentable 176
– dual 46
– fortement dual 46
– hilbertien 88
– localement convexe 44
– métrique complet 10
– métrisable 45
– normable 45
– normé 45
– polynormé 44
– précompact 57
– réflexif 46
– séparé 45
– vectoriel topologique 43
Extension d'un opérateur 43

Famille centrée 179
Fermeture d'un opérateur 126
Foncteur contravariant 13
– covariant 13
Fonction de Bessel 209
– borélienne 155
– caractéristique 16
– continue en moyenne 186
– définie positive 211
– de Dirac 82
Fonction de Dirichlet 157
– équi-mesurable 155
– essentiellement bornée 29
– d'Euler 139
– faiblement mesurable 175
Fonction génératrice 109
– de Heaviside 162
– mesurable 156
– $\mathfrak{A}$-mesurable 25
– de Möbius 138
– de première classe de Baire 250
– de sauts 162
– de Stéklov 212
– à support borné 74
Fonctionnelle continue linéaire 46
– de Minkowski 42
Forme hermitienne 95
Formule de Newton 305
– de Plancherel 113
– de sommation de Poisson 116
– de Stone 228

Graphe d'un opérateur 126
Groupe abélien libre 144
– dual 106
– libre 144
– à un paramètre 135

Hyperplan 49
– d'appui 172

Identité d'Euler 182
– de Hilbert 311
– de Kelly 305
– du parallélogramme 89, 199
– de Sokhotski 193
Image d'un opérateur 62
Indicatrice de Banach 164
Indice d'un opérateur 63
Inégalité de Bessel 91
– de Cauchy-Bouniakovski 88
– de Hölder 50
Injections canoniques 145
Intégrale faible 175
– d'une fonction 28, 134
– de Fourier 109, 111
– de Lebesgue-Stieltjes 33
– de Riemann 227
– de Riemann-Stieltjes 32
Intervalle 42

Laplacien 218
Lemme de Fatou 36
Limite de Banach 266

Limite inductive 147
– inférieure 149
– projective 147
– supérieure 149

Majorant 8
Matrice(s) bistochastique 180
– semblables 220
Mesure(s) 17, 19
– étrangères 21
– extérieure 18
– intérieure 150
– de Lebesgue 22
– projective 133
– quasi-invariante 166
– σ-additive 17
– spectrale 135
Minorant 8
Morphismes 11
– fonctoriels 14
Moyennes de Césaro 297

Nombres conjugués 50
Norme(s) 42
– croisées uniformes 53
– d'un opérateur 47
– tensorielles croisées 53
Noyau d'un opérateur 62

Objet(s) 11
– isomorphes 12
– répulsif universel 12
Opérateur adjoint 47
– auto-adjoint 94
– compact 60
– essentiellement auto-adjoint 127
– fermé 126
Opérateur de Fredholm 63
– de Hilbert-Schmidt 183, 202
– d'intégration fractionnaire 209
– linéaire continu 53
– du nombre de particules 214
– des nombres de remplissage 214
– normal 94
– partiellement isométrique 202
– positif 94
– régulier 94
– symétrique 127
– unitaire 94
– de Volterra 222
Orthocomplément 89
Orthoprojecteur 94
Ordre d'une distribution 94
– lexicologique 139
Oscillation d'une fonction 33

Partition de l'unité 189
Pas d'une subdivision 32
ε-perpendiculaire 176
Phénomène de Gibbs 298
Point de densité d'un ensemble 152
– de Lebesgue 155
Polynôme de Bernoulli 198
– d'Hermite 287
– de Laguerre 287
– de Legendre 287
– de Tchébychev 287
– trigonométrique 207
Principe de dualité 107
– d'interposition 97, 202
Processus d'orthogonalisation 92
Produit de convolution 99, 167
– de familles d'objets 145
– scalaire 87
– tensoriel 146
– de torsion 146
Projections canoniques 145

Rayon spectral 122
Relation 7
– d'équivalence 7
– d'ordre 8
– – partiel 8
Représentation de l'algèbre $C(x)$ 228
Résolvante 119
Réunion disjonctive 16

Segment 42
Semi-anneau 16
Semi-norme 42
Signe p-adique 143
Somme directe d'algèbres 220
– intégrale 32, 134, 226
Sous-ensemble extrémal 179
Spectre 120
– essentiel 228
Suite définie positive 213
– exacte 63
– fondamentale 10
– généralisée 8
– lentement croissante 111
Support d'une fonction 74

BeatriceGloria_personal library

Surface mixte 262
Système orthonormé 91
– – complet 91
– de fonctions de Haar 199
– – de Rademacher 199
– – de Walsh 199

Théorème d'Arzela-Ascoli 60
– de Banach 56
– de Banach-Steinhaus 54
– des boules contractiles 141
– de Courant 96
– d'Egorov 27
– ergodique de von Neumann 229
– de Fubini 39
– de Hahn-Banach 47, 49
– de Helly 175, 187
– de Hilbert 96
– de Klein-Milman 59
– de Lebesgue 34
– de Lévi 36
– de Lusine 157
Théorème de Nikolski 65
– du noyau 194
– de Paley-Wiener 114, 216
Theorème de Radon-Nikodym 40
– de Riesz 66
– de Stone 135
– de Stone-Weierstrass 188
– de Tikhonov 295
– de Weierstrass 206
– de Zermelo 9
Topologie convexe nucléaire 170
– faible 46, 53
– *-faible 46
– forte 54
– uniforme 54
Trace d'un opérateur 203
Transformation directe de Fourier 111
– de Lorentz 286
– naturelle des foncteurs 14
– réciproque de Fourier 111
Transformée de Fourier 108

Valeur principale 192
Variation d'une charge 21
– d'une fonction 23
Variété linéaire 49
Vecteur cyclique 129, 213, 219
Volume mixte 262

NOTATIONS

Les trois chiffres qui suivent chaque symbole renvoient respectivement au chapitre, paragraphe et numéro de la partie « Théorie » où ce symbole est expliqué.

N, ensemble des entiers naturels ;

Z, ensemble des entiers relatifs ;

Q, ensemble des nombres rationnels ;

R, ensemble des nombres réels;

C, ensemble des nombres complexes.

Espaces

$A^2(D)$, 3.4.1 espace des fonctions analytiques sur le disque D ;

$B(X)$, 3.3.2 espace des fonctions bornées sur l'ensemble X ;

$C(X)$, 3.1.4 espace des fonctions continues sur l'ensemble X ;

$C^r(\Omega)$ $\left(\text{resp. } C^r(\bar{\Omega})\right)$, 3.3.3 espace des fonctions r fois continûment différentiables dans Ω (resp. continûment prolongeables à $\bar{\Omega}$) ;

$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, 3.3.3 espace des fonctions indéfiniment différentiables à support borné sur Ω ;

$\mathcal{D}'(\Omega)$, 3.3.4 espace des distributions ;

$\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, 3.3.3 espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω.

$\mathcal{E}'(\Omega)$, 3.3.4 espace des distributions à support compact ;

$\mathcal{F}(L_1, L_2)$, 3.2.3 espace des opérateurs de Fredholm de l'e.v.t. L_1 dans l'e.v.t. L_2 ;

H^*, 3.4.2 espace antidual ;

$H_1 \oplus H_2$, 3.4.1 somme directe d'espaces vectoriels ;

$H_1 \oplus H_2$, 3.1.4 produit tensoriel d'espaces vectoriels ;

$\mathcal{K}(L_1, L_2)$, 3.2.2 espace des opérateurs compacts de l'e.v.t. L_1 dans l'e.v.t. L_2 ;

$\mathcal{L}(L_1, L_2)$, 3.1.2 espace des applications linéaires continues de l'e.v.t. L_1 dans l'e.v.t. L_2 ; $\operatorname{End} L = \mathcal{L}(L_1, L_2)$.

L', 3.1.2 espace antidual de L ;

$L_p(X, \mu)$, 3.3.1 espace des fonctions sur X de puissance p-ième sommable ;

$L_\infty(X, \mu)$, 3.3.1 espace des fonctions essentiellement bornées sur X ;

$l_p(n, K)$, 3.1.4 espace de dimension n sur un corps K, muni de la norme $\|x\|_p$;

$l_p(K)$, 3.1.4 espace des suites sur un corps K, muni de la norme $\|x\|_p$;

$P(\mathbf{Z})$, 4.2.2 espace des suites lentement croissantes ;

$P\mathcal{E}(\mathbf{R}^{(n)})$, 4.1.2 sous-espace de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^{(n)})$ des fonctions ne croissant pas plus vite qu'un polynôme ;

$S(\mathbf{R}^{(n)})$, 3.3.3 espace des fonctions indéfiniment différentiables et rapidement décroissantes à l'infini ;

$S'(\mathbf{R}^{(n)})$, 3.3.4 espace des distributions à croissance modérée ;

$V[a, b]$, 2.1.3 espace des fonctions à variation bornée sur l'intervalle $[a, b]$.

Convergences

$A_n \Rightarrow A$, $A = u\text{-}\lim A_n$, 3.2.1 convergence uniforme des opérateurs ;

$A_n \to A$, $A = s\text{-}\lim A_n$, 3.2.1 convergence forte des opérateurs ;

$A_n \rightharpoonup A$, $A = w\text{-}\lim A_n$, 3.2.1 convergence faible des opérateurs ;

$f_n \Rightarrow f$, 2.2.2 convergence uniforme des fonctions ;

$f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$, 2.2.2 convergence presque partout de fonctions ;

$f_n \xrightarrow{\mu} f$, 2.2.2 convergence des fonctions pour la mesure μ.

Opérateurs

A', 3.1.2 opérateur adjoint de A ;

A^*, 3.4.2 opérateur adjoint hermitien de A ;

$A \gg 0$, 3.4.2 opérateur positif A ;

$A_1 \oplus A_2$, 3.2.3 somme directe des opérateurs A_1 et A_2 ;

$B \supset A$, 5.1.3 B est l'extension de A ;

coker A, 3.2.3 conoyau de A ;

D_A, 3.2.3 domaine de définition de l'opérateur A ;

∂, 3.3.3 opérateur de dérivation partielle ;

$i(A)$, 3.2.3 indice de l'opérateur A ;

im A, 3.2.3 image de l'opérateur A ;

ker A, 3.2.3 noyau de l'opérateur A ;

$M(f)$, 3.3.5 opérateur de multiplication par une fonction f ;

$r(A)$, 5.1.2 rayon spectral de l'opérateur A ;

$r_\lambda(A)$, 5.1.1 résolvante de l'opérateur A ;

rang A, 3.2.3 rang de l'opérateur A ;

$S(f)$, 4.1.1 opérateur de convolution de la fonction f :

$T(a)$, 4.1.1 opérateur de translation de a ;

$\varrho(A)$, 5.1.2 ensemble résolvant de l'opérateur A ;

$\sigma(A)$, 5.1.2 spectre de l'opérateur A.

Autres notations

$A \triangle B$, 2.1.1 différence symétrique des ensembles A et B ;

$A \sqcup B$, 2.1.1 réunion disjonctive d'ensembles ;

$\mathring{B}(x, r)$ (resp. $B(x, r)$), 3.1.1 boule ouverte (resp. fermée) dans un espace métrique, de rayon r et de centre x ;

card Y, 2.1.3 nombre d'éléments de l'ensemble Y ;
cont (K_1, K_2), cov (K_1, K_2), 1.3 foncteurs contravariants (resp. covariants)
diam X, 3.2.2 diamètre de l'ensemble X ;
ess sup f, 2.3.1 borne supérieure essentielle de f -
$\hat{f}$, 4.2.1 transformée de Fourier de f ;
$f_1 \times f_2$, 3.3.5 produit direct des distributions f_1 et f_2 ;
$f_1 * f_2$, 4.1.1 produit de convolution de f_1 et de f_2 ;
$\hat{G}$, 4.2.1 groupe dual de G ;
$K[G]$, 4.1.1 algèbre de groupe ;
$\mathfrak{K}^\circ$, 1.3 catégorie duale de $\mathfrak{K}$;
$L(S, \mu)$, 2.1.2 famille des ensembles μ-mesurables ;
Mor (A, B), Ob (K), 1.3 morphismes et objets de la catégorie $\mathfrak{K}$;
$\mathcal{P}(X)$, 2.1.1 ensembles des parties de X ;
$Q_A(X)$, 3.4.2 forme (quadratique) hermitienne associée à l'opérateur A ;
$R(S)$, 2.1.1 anneau engendré par la famille d'ensembles S ;
$R_\sigma(S)$, 2.1.1 σ-anneau engendré par la famille d'ensembles S ;
supp φ, 3.3.3 support de la fonction φ ;
$\mathbf{T}^{(n)}$, 4.1.1 tore de dimension n ;
$\mathrm{Var}_a^b f$, 2.1.3 variation de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$;
$X^\perp$, 3.2.3 orthocomplément de X ;
$x \perp y$, 3.4.1 le vecteur x est orthogonal au vecteur y ;
$\delta(x)$, 3.3.4 la fonction de Dirac (ou la fonction delta) ;
$\delta_b(x)$, 3.3.5 la fonction de Dirac translatée ;
δ_{ij}, 3.2.3 symbole de Kronecker ;
$\mu(A)$, 2.1.2 mesure de l'ensemble A ;
$\mu^*(A)$, 2.1.2 mesure supérieure de l'ensemble A ;
$\nu(A)$, 2.1.2 charge ;
$|\nu|(A)$, 2.1.2 variation de la charge ;
$\check{\varphi}(x)$, 4.1.2 $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$;
χ_A, 2.1.1 fonction caractéristique de l'ensemble A.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5

Chapitre premier. ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES ENSEMBLES ET DE TOPOLOGIE 7

§ 1. Relations. Axiomes de choix et lemme de Zorn 7
Théorie (7). Exercices (137). Indications (231)
§ 2. Complétions 10
Théorie (10). Exercices (141). Indications (234)
§ 3. Catégories et foncteurs 11
Théorie (11). Exercices (144). Indications (237)

Chapitre 2. THÉORIE DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRALE 16

§ 1. Théorie de la mesure 16
1. Algèbre d'ensembles 16
Théorie (16). Exercices (148). Indications (240)
2. Prolongement de la mesure 17
Théorie (17). Exercices (150). Indications (242)
3. Constructions de mesures 21
Théorie (21). Exercices (152). Indications (245)
§ 2. Fonctions mesurables 25
1. Propriétés des fonctions mesurables 25
Théorie (25). Exercices (154). Indications (247)
2. Convergences des fonctions mesurables 26
Théorie (26). Exercices (156). Indications (249)
§ 3. Intégrale 28
1. L'intégrale de Lebesgue 28
Théorie (28). Exercices (158). Indications (250)
2. Fonctions à variation bornée et intégrale de Lebesgue-Stieltjes 32
Théorie (32). Exercices (161). Indications (254)
3. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue 34
Théorie (34). Exercices (164). Indications (257)

Chapitre 3. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES ET OPÉRATEURS LINÉAIRES 42

§ 1. Théorie générale 42
1. Topologie, convexité et semi-normes 42
Théorie (42). Exercices (169). Indications (261)

2. Espaces duals 45
Théorie (45). Exercices (171). Indications (263)
3. Théorème de Hahn-Banach 47
Théorie (47). Exercices (173). Indications (265)
4. Espaces de Banach 50
Théorie (50). Exercices (175). Indications (267)
§ 2. Opérateurs linéaires 53
1. Espace des opérateurs linéaires 53
Théorie (53). Exercices (177). Indications (269)
2. Ensembles et opérateurs compacts 57
Théorie (57). Exercices (179). Indications (271)
3. Théorie des opérateurs de Fredholm 62
Théorie (62). Exercices (181). Indications (273)
§ 3. Espaces fonctionnels et distributions 70
1. Espaces des fonctions intégrables 70
Théorie (70). Exercices (184). Indications (274)
2. Espaces des fonctions continues 71
Théorie (71). Exercices (186). Indications (277)
3. Espaces des fonctions lisses 73
Théorie (73). Exercices (189). Indications (281)
4. Distributions 81
Théorie (81). Exercices (192). Indications (283)
5. Opérations sur les distributions 84
Théorie (84). Exercices (194). Indications (284)
§ 4. Espaces hilbertiens 87
1. Géométrie de l'espace hilbertien 87
Théorie (87). Exercices (197). Indications (286)
2. Opérateurs dans l'espace hilbertien 93
Théorie (93). Exercices (200). Indications (288)

Chapitre 4. TRANSFORMATION DE FOURIER ET ÉLÉMENTS D'ANALYSE HARMONIQUE 98

§ 1. Produits de convolution sur un groupe commutatif 98
1. Produits de convolution des fonctions de base 98
Théorie (98). Exercices (205). Indications (292)
2. Convolution de distributions 102
Théorie (102). Exercices (207). Indications (293)
§ 2. Transformation de Fourier 106
1. Caractères d'un groupe commutatif 106
Théorie (106). Exercices (210). Indications (295)
2. Séries de Fourier 110
Théorie (110). Exercices (212). Indications (296)
3. Intégrale de Fourier 111
Théorie (111). Exercices (214). Indications (299)
4. Transformation de Fourier des distributions 115
Théorie (115). Exercices (216). Indications (303)

Chapitre 5. THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS 118

§ 1. Calcul fonctionnel 118
1. Fonctions opératorielles dans un espace de dimension finie 118
Théorie (118). Exercices (219). Indications (305)
2. Fonctions d'opérateur auto-adjoint borné 120
Théorie (120). Exercices (221). Indications (306)
3. Opérateurs auto-adjoints non bornés 126
Théorie (126). Exercices (223). Indications (307)

§ 2. Décomposition spectrale des opérateurs 129
1. Réduction d'un opérateur à la multiplication par une fonction 129
Théorie (129). Exercices (224). Indications (308)
2. Théorème spectral 133
Théorie (133). Exercices (226). Indications (310)
Bibliographie principale 312
Bibliographie auxiliaire 314
Index alphabétique 315
Notations 319